Septiembre 2020

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2019/2020

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

   b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + I_3 = BC$, donde I_3 es la matriz identidad.

2. *a*) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +2y & +az & = & a \\ x & +ay & +2z & = & a \\ -x & +y & +z & = & 1 \end{array} \right. .$$

   b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

3. *a*) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}(2x)} \right)$.

   b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^{(x-1)} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases},$$

   donde ln es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

4. *a*) **[1,5 puntos]** Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

   b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

5. *a*) **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{-dx}{1 + e^x}$.

   (Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)

   b) **[1,25 puntos]** Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

6. Sean el plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x - 2y - 2 & = & 0 \\ y - z - 2 & = & 0 \end{array} \right.$.

   a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano π.

   b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π, y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

7. Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2y & = & 4 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$, $\quad s \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1, 0, 2)$.

   a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s.

   b) **[1,25 puntos]** Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s.

8. *a*) El 70 % de los usuarios de instagram tiene menos de 34 años, el 25 % entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 5 % más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98 % de los menores de 34 años, el 40 % de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 10 % de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluídos)?

   b) El tiempo que un usuario de la red instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

a	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936

Septiembre de 2020

Cipri

1) $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-2\\0&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&-2\end{pmatrix}$

a) A^{-1}

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&-2&0&1&0\\0&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{F_2+F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[2F_3+F_1]{-F_3+F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&1&2\\0&1&0&0&0&-1\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}}$$

b) $AX+I=BC$

$AX=BC-I$

$A^{-1}AX=A^{-1}(BC-I)$

$\boxed{X=A^{-1}(BC-I)}$

$$BC=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1&-3\\-2&0&2\\-1&1&3\end{pmatrix}$$

$$BC-I=\begin{pmatrix}5&1&-3\\-2&0&2\\-1&1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4&1&-3\\-2&-1&2\\-1&1&2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=A^{-1}(BC-I)=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&+1&-3\\-2&-1&+2\\-1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3&0\\1&-1&-2\\3&2&-1\end{pmatrix}}$$

2) a) $\begin{cases}x+2y+az=a\\x+ay+2z=a\\-x+y+z=1\end{cases}$ $A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&a&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$, $\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&2&a&a\\1&a&2&a\\-1&1&1&1\end{pmatrix}$

Rango de A

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&a&2\\-1&1&1\end{vmatrix}=a+a-4+a^2-2-2=a^2+2a-8=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\begin{cases}-4\\2\end{cases}$$

Rango de $\tilde{A}$

$\boxed{a=-4}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & -4 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_3+F_2}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango $\tilde{A}=3$ y rango $A=2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$

$\boxed{a=2}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango $\tilde{A}=2=$ $=$rango A

Discusión:

Si $a \neq \begin{cases} -4 \\ 2 \end{cases}$, entonces rango $A=3=$ rango $\tilde{A}=$ nº incógnitas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (teorema de Rouché-Fröbenius) S.C.D.

Si $a=-4 \Rightarrow$ rango $A=2<3=$ rango $\tilde{A} \Rightarrow$ (tª de Rouché-Fröbenius) S.I.

Si $a=2 \Rightarrow$ rango $A=2=$ rango $\tilde{A}<3 \Rightarrow$ (tª de Rouché-Fröbenius) S.C.I.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_3+F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ [1] \\ [2] \end{matrix}$

Llamamos $z=\lambda \in \mathbb{R}$

De [1]: $y+\lambda=1 \Rightarrow y=1-\lambda$

Sustituyendo en [2]: $x=1-(1-\lambda)-\lambda=0$

$\boxed{\text{Soluciones}: (x,y,z)=(0,1-\lambda,\lambda) \text{ con } \lambda\in\mathbb{R}}$

3 a) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(2x)-x}{x\operatorname{sen}(2x)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(2x)\cdot 2-1}{1\cdot\operatorname{sen}(2x)+x\cdot\cos(2x)\cdot 2} = +\infty$

regla de L'Hôpital

b) $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & x \leq 1 \\ x-2 & 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & x \geq 2 \end{cases}$

Continuidad en $x=1$: ¿$\exists \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$?

$$\lim_{x\to 1} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} 2^{x-1} = 2^0 = 1 \\ \lim_{x \to 1^+} (x-2) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x) \Rightarrow$$

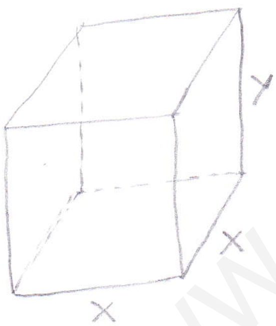
$\boxed{f \text{ tiene en } x=1 \text{ una discontinuidad (no evitable) de salto finito } 1-(-1)=2}$

Continuidad en $x=2$: ¿$\exists \lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$?

$$\lim_{x\to 2} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} (x-2) = 0 \\ \lim_{x\to 2^+} \ln(x-1) = \ln 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \exists \lim_{x\to 2} f(x) = 0 \\ f(2) = \ln 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{f \text{ es continua en } x=2}$

4) a)



Planteamiento: $\begin{cases} x^2 y = 108 \\ S = x^2 + 4xy \end{cases}$

Como $x^2 y = 108 \Rightarrow y = \dfrac{108}{x^2}$

y sustituyendo

$$S = x^2 + 4x\,\frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x} = f(x)$$

Hay que minimizar $f(x)$:

$$f'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{432}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 432 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{432}{2}} = 6 \quad \text{(posible extremo relativo)}$$

$$f''(x) = 2 + \frac{432 \cdot 2x}{x^4}$$

$f''(6) > 0 \Rightarrow x = 6$ es un mínimo relativo de f

$\boxed{\text{Las dimensiones de la caja son } 6\times 6\times \frac{108}{6^2} = 6\times 6\times 3 \text{ dm}}$ $\vec{C}ip\vec{r}i$

b) Recta tangente a $y=f(x)$ en $x=a$

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

En nuestro caso $a=1$ y $f(x)=x^2+x-1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1 \\ f'(x)=2x+1 \rightarrow f'(1)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y-1=3(x-1) \text{ recta tangente a } f(x) \text{ en } x=1}$$

5 a) $$\boxed{\int \frac{-dx}{1+e^x}} = \left[\begin{array}{l} t=e^x \\ x=\log t \rightarrow dx=\frac{1}{t}dt \end{array}\right] = \int \frac{-dt}{(1+t)t} \overset{(1)}{=}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-1}{(1+t)t} = \frac{A}{1+t}+\frac{B}{t} = \frac{At+B(1+t)}{(1+t)t} \Rightarrow At+B(1+t)=-1$$

Para $t=-1$: $-A=-1 \Rightarrow A=1$

$t=0$: $B=-1$

Así: $$\frac{-1}{(1+t)t} = \frac{1}{1+t}-\frac{1}{t}$$

y, por tanto:

$$\overset{(1)}{=} \int \frac{dt}{1+t} - \int \frac{dt}{t} = \log|1+t| - \log|t| = \boxed{\log|1+e^x| - \log|e^x| + C}$$

b) Calculamos los puntos de corte de f y g:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow -x^2+2x+4=x+2 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

Calculamos el área pedida:

$$\boxed{A} = \left|\int_{-1}^{2}(f(x)-g(x))\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{2}[(-x^2+2x+4)-(x+2)]\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx\right| = \left|\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}\right| =$$

$$= \left| \left(\frac{-8}{3} + 2 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) \right| = \boxed{\frac{9}{2}\ u^2}$$

6 $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0 \quad , \quad r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

a) $P(1,2,-1)$, ¿$d(P,\pi)$?

$$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|1 + 2\cdot 2 - (-1) - 4|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}\ u}$$

b) Sea A el punto de intersección de r y π

$$A \equiv \begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ x - 2y \quad\quad - 2 = 0 \\ \quad\quad y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{4F_3+F_2} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{De [3]: } z = -2 \\ \text{Sustituimos en [2]: } y = \frac{-2+2}{-4} = 0 \\ \text{Sustituimos en [1]: } x = 2 \end{array}\right\} A(2,0,-2)$$

El área del triángulo es:

$$\boxed{A_{\text{TRIÁNGULO}}} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \left\| \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\| =$$

$\overrightarrow{AB} = (-1,-1,4)$ $\quad = \frac{1}{2} \|(-7,-5,-3)\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-7)^2+(-5)^2+(-3)^2} =$

$\overrightarrow{AC} = (-2,1,3)$ $\quad = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{83} = \frac{\sqrt{83}}{2}\ u^2}$

7 a) $r \equiv \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ \quad\quad z = 0 \end{cases}$

$$s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1} \equiv \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-2} \\ \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1} \end{cases} \equiv \begin{cases} 2x + 3y = -6 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Estudiamos los rangos de M y $\tilde{M}$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1+F_3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } M = 3$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1+F_3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 4$$

Como rango $M = 3$ y rango $\tilde{M} = 4 \Rightarrow$ $\boxed{r \text{ y } s \text{ se cruzan}}$

b) $\pi \equiv \begin{cases} P(-1,0,2) \\ \vec{u}_r = (-2,-2,0) \\ \vec{u}_s = (3,-2,1) \end{cases}$ ya que $\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} = (-2,-2,0)$

$$\pi \equiv \det \begin{pmatrix} x+1 & -2 & 3 \\ y & -2 & -2 \\ z-2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2x + 2y + 10z - 22 = 0 \Rightarrow$$

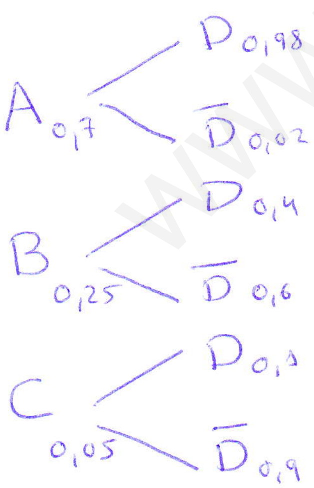
$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv -x + y + 5z = 11}$$

8) a) A = usuario de menos de 34 años

B = " " entre 34 y 54 años

C = " " más de 54 años

D = el usuario se conecta a diario



a₁) $\boxed{P(\bar{D})} = P(A)P(\bar{D}/A) + P(B)P(\bar{D}/B) + P(C)P(\bar{D}/C) = 0{,}7 \cdot 0{,}02 + 0{,}25 \cdot 0{,}6 + 0{,}05 \cdot 0{,}9 =$

$= \boxed{0{,}209}$

a₂) $\boxed{P(B/D)} = \dfrac{P(B \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(B)P(D/B)}{1 - P(\bar{D})} =$

$= \dfrac{0{,}25 \cdot 0{,}4}{1 - 0{,}209} = \boxed{0{,}1264}$

b) X = tiempo que un usuario de Insta pasa conectado (a diario)

$X \sim N(53, 10)$

$b_1)$ $\boxed{P(X \geq 30) = P\left(Z \geq \frac{30-53}{10}\right) = P(Z \geq -2{,}3) = = P(Z \leq 2{,}3) = 0{,}9893}$

$b_2)$ $P(40 \leq X \leq 67) = P\left(\frac{40-53}{10} \leq X \leq \frac{67-53}{10}\right) =$

$= P(-1{,}3 \leq Z \leq 1{,}4) = P(Z \leq 1{,}4) - P(Z \leq -1{,}3) =$

$= P(Z \leq 1{,}4) - \left(1 - P(Z \leq 1{,}3)\right) = 0{,}9192 - (1 - 0{,}9032) =$

$= 0{,}8224$

El 82,24% de los usuarios se conectan entre 40 y 67 minutos.