Julio 2020

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2019/2020

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** ejercicios, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. *a*) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente todos los posibles valores x, y, z para que el producto de las matrices $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

2. *a*) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} ax & -ay & -z & = & a \\ ax & -ay & & = & a \\ ax & +2y & -z & = & 1 \end{array} \right. .$$

   b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-2} & \text{si} \quad x < 2 \\[2ex] \cos(\pi x) & \text{si} \quad 2 \le x \le 3 \\[2ex] \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

   a) **[1,5 puntos]** Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

   b) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xe^{-x}}{1 + 2x - cos(x^2)}$.

4. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.

   a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

   b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

5. *a*) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2 - 2x + 1}\, dx$.

   b) **[1,25 puntos]** Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$ y el eje de abscisas.

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2019/2020

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** ejercicios, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

6. Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 + \lambda - \mu \\ y & = & -\lambda + \mu \\ z & = & -2 + 2\lambda \end{array} \right.$.

   a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.

   b) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3, -3, 2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

7. Dados el plano $\pi \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 + \mu \\ y & = & 1 + \lambda + a\mu \\ z & = & 1 + 2\lambda - \mu \end{array} \right.$ y la recta $s \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 1 - b \\ z & = & -3 \end{array} \right.$.

   a) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π.

   b) **[1 punto]** Si $a = 0$ y $b = 3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto $P(1, -1, -8)$ es paralela al plano π y perpendicular a la recta s.

8. *a*) En un servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3 % en el caso de código amarillo, 2 % en el naranja y 1 % en el rojo. Si se recibe un aviso,

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?

   b) Si en una centralita se reciben 9 avisos,

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

n	**k \ p**	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.33**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.49**	**0.50**
9	**0**	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0272	0.0207	0.0101	0.0046	0.0023	0.0020
	1	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1206	0.1004	0.0605	0.0339	0.0202	0.0176
	2	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2376	0.2162	0.1612	0.1110	0.0776	0.0703
	3	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2731	0.2716	0.2508	0.2119	0.1739	0.1641
	4	0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2017	0.2194	0.2508	0.2600	0.2506	0.2461
	5	0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.0994	0.1181	0.1672	0.2128	0.2408	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0326	0.0424	0.0743	0.1160	0.1542	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0069	0.0098	0.0212	0.0407	0.0635	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0008	0.0013	0.0035	0.0083	0.0153	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016	0.0020

Julio de 2020

1) a) $A=\begin{pmatrix}1 & a+1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & a\\ a & 0 & 1 & 0\\ a & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$

A no tiene inversa $\Longleftrightarrow |A|=0$

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & a+1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & a\\ a & 0 & 1 & 0\\ a & 0 & 2 & 0\end{vmatrix}\overset{-aF_1+F_3}{\underset{-aF_1+F_4}{=}}\begin{vmatrix}1 & -a+1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & a\\ 0 & -a^2-a & -2a+1 & -a\\ 0 & -a^2-a & -2a+2 & -a\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}2 & 1 & a\\ -a^2-a & -2a+1 & -a\\ -a^2-a & -2a+2 & -a\end{vmatrix}=-2a(-2a+1)+a(-a^2-a)(-2a+2)-$$

$$-a(-a^2-a)-\left[a(-2a+1)(-a^2-a)-2a(-2a+2)-a(-a^2-a)\right]=$$

$$=4a^2-2a+(-a^3-a^2)(-2a+2)+a^3+a^2-$$

$$-\left[(-2a^2+a)(-a^2-a)+4a^2-4a+a^3+a^2\right]=$$

$$=\cancel{4a^2}-2a+\cancel{2a^4}-\cancel{2a^3}+\cancel{2a^3}-2a^2+\cancel{a^3}+\cancel{a^2}-\cancel{2a^4}-2a^3+a^3+a^2-$$

$$-\cancel{4a^2}+4a-\cancel{a^3}-\cancel{a^2}=-a^3-a^2+2a=a(-a^2-a+2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ -a^2-a+2=0\Rightarrow a=\begin{cases}-2\\ +1\end{cases}\end{cases}$$

$\boxed{\text{A no tiene inversa para } a=-2,0,1}$

b) $C=\begin{pmatrix}x & 1\\ y & z\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

C y D conmutan $\Longleftrightarrow CD=DC$

$$CD=\begin{pmatrix}x & 1\\ y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+1 & x-1\\ 3y+z & y-z\end{pmatrix}$$

$$DC=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & 1\\ y & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+y & z+3\\ x-y & 1-z\end{pmatrix}$$

$$CD=DC \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 3y+z & y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y & z+3 \\ x-y & 1-z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x+1=3x+y \Rightarrow y=1 \\ x-1=z+3 \\ 3y+z=x-y \\ y-z=1-z \Rightarrow y=1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x-z=4 \\ -x+z=-4 \end{array}\right\} \text{Iguales}$$

Llamamos $z=\lambda \in \mathbb{R}$

Entonces: $\left.\begin{array}{l} x=4+\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{array}\right\}$ $\boxed{\text{Soluciones } (x,y,z)=(4+\lambda, 1, \lambda) \text{ con } \lambda\in\mathbb{R} \text{ para que } CD=DC}$

2 a) $A=\begin{pmatrix} a & -a & -1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\tilde{A}=\begin{pmatrix} a & -a & -1 & a \\ a & -a & 0 & a \\ a & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Rango de A

$|A| = a^2-2a-a^2-a^2 = -a^2-2a=0 \Rightarrow a(-a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-2 \end{cases}$

- Si $a \neq \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow$ rango $A=3=$ rango $(\tilde{A})=$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (teorema de Rouché-Fröbenius) S.C.D.

- Si $\boxed{a=0} \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rg\,A<3$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\,A=2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\,\tilde{A}=2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

- Si $\boxed{a=-2} \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rg\,A<3$

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\,A=2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Cipri

$\Rightarrow rg\,\tilde{A} = 3$

<u>Discusión</u>:

Si $a \neq \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow rg\,A = 3 = rg\,\tilde{A} = $ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

Si $a = 0 \Rightarrow rg\,A = rg\,\tilde{A} = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.I.

Si $a = -2 \Rightarrow rg\,A = 2 \neq 3 = rg\,\tilde{A} \Rightarrow$ S.I.

b) Si $a = 2$, el sistema es C.D.

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 2 \\ 2x - 2y = 2 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [2]: $z = 0$

De [3]: $4y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$

Sustituimos en [1]: $x = \frac{2+2y+z}{2} = \frac{2+2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+0}{2} = \frac{3}{4}$

$\boxed{\text{Solución: } (x, y, z) = \left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}, 0\right)}$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-2} & x < 2 \\ \cos(\pi x) & 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{\ln(x-2)}{3-x} & x > 3 \end{cases}$

Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio, por ser una función racional bien definida, una función trigonométrica y un cociente (que no hace cero el denominador), en el que el numerador está bien definido.

Continuidad en $x=2$: ¿ $\exists \lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$?

$f(2) = \cos(2\pi) = 1$ (la calculadora en radianes)

$$\lim_{x\to 2} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \dfrac{3}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \cos(\pi x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x) \rightarrow f \text{ no es continua en } x=2$$

$\boxed{f \text{ tiene una discontinuidad de salto infinito en } x=2}$

Continuidad en $x=3$: ¿ $\exists \lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$?

$f(3) = \cos(3\pi) = -1$

$$\lim_{x\to 3} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} \cos(\pi x) = -1 \\ \lim_{x\to 3^+} \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 3^+} \dfrac{\frac{1}{x-2}}{-1} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 3} f(x) = -1 \Rightarrow f(3) = \lim_{x\to 3} f(x) \Rightarrow f$ es continua en $x=3$

Conclusión: f es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$ y en $x=2$ presenta una discontinuidad de salto infinito.

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-xe^{-x}}{2+\operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

4) $$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$$

a) $Dom(f) = \mathbb{R}$ ya que $x^2+1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2+1)-(x^2-2x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow (2x-2)(x^2+1)-(x^2-2x+1)\cdot 2x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{2x^3} + \cancel{2x} - 2x^2 - 2 - \cancel{2x^3} + 4x^2 - \cancel{2x} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ (posibles extremos relativos)

$$f''(x) = \frac{4x(x^2+1)^2 - (2x^2-2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$f''(1) > 0 \Rightarrow x = 1$ es un mínimo relativo de f

$f''(-1) < 0 \Rightarrow x = -1$ es un máximo relativo de f

Las coordenadas de los extremos relativos son:

$(1, f(1)) = (1, 0)$ mínimo relativo de f

$(-1, f(-1)) = (-1, 2)$ máximo relativo de f

b) Ec. de la recta tangente a f en $x = a$

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

En nuestro caso: $y - f(0) = f'(0)x$

$\boxed{y - 1 = -2x}$ Recta tangente a f en $x = 0$

Ec. de la recta normal a f en $x = a$

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

En nuestro caso: $\boxed{y - 1 = \frac{1}{2}x}$ Recta normal a f en $x=0$

5 a) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx$

Descomponemos $\dfrac{3x-2}{x^2-2x+1}$ en fracciones simples:

$x^2-2x+1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (doble)

$$\frac{3x-2}{x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-2 = Ax - A + B \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 3 \\ -2 = -A+B \end{array}\right\} \Rightarrow B = 1$$

Así $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{3}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx =$

$$= 3\log|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = 3\log|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + C$$

donde log es el logaritmo natural.

b) $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x\left(-x^2+2x+3\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x^2+2x+3 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\boxed{A} = \left| \int_{-1}^{0} g(x)\,dx \right| + \left| \int_{0}^{3} g(x)\,dx \right| = \left| \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^{0} \right| +$$

$$+ \left| \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right]_{0}^{3} \right| = \left| G(0) - G(-1) \right| + \left| G(3) - G(0) \right| =$$

$$= \left| -\frac{7}{12} \right| + \left| \frac{45}{4} \right| = \boxed{\frac{71}{6}\ u^2}$$

$$\int g(x)\,dx = \int \left(-x^3+2x^2+3x\right)dx = \frac{-x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} = G(x)$$

$G(0) = 0$

$G(-1) = \frac{-7}{12}$

$G(3) = \frac{45}{4}$

6 a) $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda - \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

$\vec{n}_{\pi_1} = (2, 1, 1)$

$$\vec{n}_{\pi_2} = \vec{u}_{\pi_2} \times \vec{v}_{\pi_2} = (1,-1,2) \times (-1,1,0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{k} - 2\vec{j} - \vec{k} - 2\vec{i} = -2\vec{i} - 2\vec{j} = (-2,-2,0)$$

$$\cos \measuredangle\{\pi_1, \pi_2\} = \frac{\left|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}\right|}{\left|\vec{n}_{\pi_1}\right| \left|\vec{n}_{\pi_2}\right|} = \frac{|-4-2|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{8}} = \frac{6}{\sqrt{48}}$$

$$\boxed{\alpha = \measuredangle\{\pi_1, \pi_2\} = \arccos \frac{6}{\sqrt{48}} = 30^\circ}$$

b) $V = \frac{1}{6}\left|\det(\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC})\right|$

donde A, B y C son los puntos de corte de π_1 con los ejes coordenados

$$A: \begin{cases} \pi_1 \\ \text{eje } OX: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \end{cases} A(1,0,0)$$

$$B: \begin{cases} \pi_1 \\ \text{eje } OY: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \end{cases} B(0,2,0)$$

$$C: \begin{cases} \pi_1 \\ \text{eje } OZ: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{cases} C(0,0,2)$$

$\vec{PA} = (1,0,0)-(3,-3,2) = (-2,3,-2)$

$\vec{PB} = (0,2,0)-(3,-3,2) = (-3,5,-2)$

$\vec{PC} = (0,0,2)-(3,-3,2) = (-3,3,0)$

$$\boxed{V = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-6| = 1\,u^3}$$

7 a) $s \subset \pi \iff \begin{cases} \vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_s = 0 \\ P_s \in \pi \quad \forall P_s \in s \end{cases}$

De otra forma al final

$$s \equiv \begin{cases} x-2y = 1-b \\ z = -3 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 1-b+2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -3 \end{cases} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n}_\pi = \vec{u}_\pi \times \vec{v}_\pi = (0,1,2)\times(1,a,-1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\vec{i} + 2\vec{j} - k - 2a\vec{i} = (-2a-1, 2, -1)$$

$\vec{u}_s = (2,1,0)$

$\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_s = 0 \Rightarrow 2(-2a-1) + 1\cdot 2 + 0\cdot(-1) = 0 \Rightarrow a = 0$

$$P_s(1-b, 0, -3) \in \pi \iff \begin{cases} 1-b = -1+\mu \\ 0 = 1+\lambda \Rightarrow \lambda = -1 \\ -3 = 1+2\lambda-\mu \end{cases}$$

$-3 = 1-2-\mu \Rightarrow \mu = 2$

Sustituyendo en la 1ª ecuación:

$b = 1+1-2 = 0$

$$\boxed{\text{Si } (a,b) = (0,0) \Rightarrow s \subset \pi}$$

b) $\vec{n}_\pi = (-1-2a, 2, -1) = (-1, 2, -1)$

$\vec{u}_s = (2, 1, 0)$

$\left.\begin{array}{l} r \parallel \pi \Rightarrow \vec{u}_r \perp \vec{n}_\pi \\ r \perp s \Rightarrow \vec{u}_r \perp \vec{u}_s \end{array}\right\} \quad \vec{u}_r = \vec{n}_\pi \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -\vec{k} - 2\vec{j} - 4\vec{k} + \vec{i} = (1, -2, -5)$

$r = \{P, \vec{u}_r\} \equiv \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = -1 - 2\beta \\ z = -8 - 5\beta \end{cases}$ con $\beta \in \mathbb{R}$

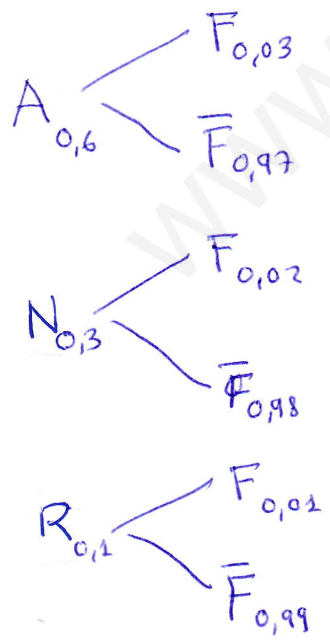
De otra forma al final

$r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+8}{-5}$

$r \equiv \begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} \Rightarrow -2x + 2 = y + 1 \Rightarrow -2x - y = -1 \\ \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+8}{-5} \Rightarrow -5y - 5 = -2z - 16 \Rightarrow -5y + 2z = -11 \end{cases}$

$\boxed{r \equiv \begin{cases} -2x - y = -1 \\ -5y + 2z = -11 \end{cases} \quad \text{Ec. implícita}}$

8) a) $\left.\begin{array}{l} A = \text{aviso de código amarillo} \\ N = \text{" " " naranja} \\ R = \text{" " " rojo} \end{array}\right\}$ F = falsa alarma, $\overline{F}$ = no hay falsa alarma



a₁) $\boxed{P(F)} = P(A)P(F/A) + P(N)P(F/N) + P(R)P(F/R) =$

$= 0{,}6 \cdot 0{,}03 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}1 \cdot 0{,}01 = \boxed{0{,}025}$

a₂) $\boxed{P(R \cup N / \overline{F})} = \dfrac{P[(R \cup N) \cap \overline{F}]}{P(\overline{F})} =$

$= \dfrac{P(N)P(\overline{F}/N) + P(R)P(\overline{F}/R)}{1 - P(F)} =$

$= \dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}98 + 0{,}1 \cdot 0{,}99}{1 - 0{,}025} = \boxed{0{,}4031}$

b) X = nº de avisos naranjas en la centralita

$X \rightsquigarrow B(9, 0{,}3)$

b₁) $\boxed{P(X \leq 2) = P(X=2) + P(X=1) + P(X=0) = = 0{,}2668 + 0{,}1556 + 0{,}0404 = 0{,}4628}$

b₂) Y = nº de avisos rojos en la centralita

$Y \rightsquigarrow B(9, 0{,}1)$

$\boxed{P(\text{Avisos amarillos o naranjas}) = P(Y=0) = 0{,}3874}$

(7) a) Mediante rangos (tiene que ser rango $M = 2 =$ rango $\tilde{M}$)

$$\pi \equiv \begin{cases} x = -1 \quad\quad +\mu \\ y = 1 + \lambda + \mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv (-2a-1)x + 2y - z = 2 + 2a$$

Formamos las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a-1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ -2a-1 & 2 & -1 & 2+2a \end{pmatrix}$$

Si rango $M = 2 =$ rango $\tilde{M} < 3 =$ nº de incógnitas, entonces por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado.

Rango de M

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a-1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4a = 0 \Rightarrow a = 0$$

Para $a = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rango $M = 2$

Rango de $\tilde{M}$ $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$

Conclusión

Para $a=0$ y $b=0$, rango $M = 2 =$ rango $\tilde{M} \neq 3 = n^{\circ}$ de incógnitas, luego por el t^{a} de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado, y, como consecuencia, $s \subset \pi$.

b) $\left.\begin{array}{l} [1]\ r \parallel \pi \Rightarrow r \subset \pi' \text{(plano) t.q.} \begin{cases} \pi' \parallel \pi \\ P \in \pi' \end{cases} \\ [2]\ r \perp s \Rightarrow r \subset \pi'' \text{(plano) t.q.} \begin{cases} P \in \pi'' \\ \vec{u}_r = \vec{n}_{\pi''} \end{cases} \end{array}\right\} r \equiv \pi' \cap \pi''$

$$[1]\ \left.\begin{array}{r} \pi' \equiv -x+2y-z = D' \\ P(1,-1,-8) \in \pi' \end{array}\right\} \Rightarrow D' = 5 \Rightarrow \pi' \equiv -x+2y-z = 5$$

$$[2]\ \vec{u}_r = \vec{n}_{\pi''} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} = (-2,-1,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \pi'' \equiv -2x-y = D'' \\ P(1,-1,-8) \in \pi'' \end{array}\right\} \Rightarrow D'' = -1 \Rightarrow \pi'' \equiv -2x-y = -1$$

Por tanto: $\boxed{r \equiv \begin{cases} -x+2y-z = 5 \\ -2x-y = -1 \end{cases}}$

¡Importante! Las ecuaciones implícitas de una recta no son únicas.