Junio 2021

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2020/2021

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) [**1 punto**] Calcula razonadamente el determinante de $A^\top$, es decir, la matriz traspuesta de A.

   b) [**1,5 puntos**] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X \cdot A + 3 \cdot A = B$.

2. *a*) [**1,75 puntos**] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{llll} x & +y & +z & = a+1 \\ a \cdot x & & +z & = a-1 \\ x & -y & +z & = 3 \end{array} \right. .$$

   b) [**0,75 puntos**] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 0$, si es posible.

3. *a*) [**1,25 punto**] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{2}{3+e^x} dx$.

   (Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)

   b) [**1,25 puntos**] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{-x+1}{x^2+3} dx$.

4. *a*) [**1,25 puntos**] Sea el punto $P(1,0,1)$ y la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta r.

   b) [**1,25 puntos**] Sean las rectas $s \equiv \left\{ \begin{array}{ll} x = 0 & +2\lambda \\ y = 1 & -2 \cdot a \cdot \lambda \\ z = 0 & +2\lambda \end{array} \right.$ y $t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.

5. Sean los puntos $A(0,0,1)$, $B(2,1,0)$, $C(1,1,1)$ y $D(1,1,2)$.

   - [**1,25 puntos**] Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
   - [**1,25 punto**] Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C, y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D.

6. *a*) [**1 punto**] Sea la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1,2)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

   b) [**1,5 puntos**] Sea la función $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{array} \right.$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

7. *a*) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \to 2} \dfrac{e^{x-2}-1}{2x-4}$.

b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{2x-1}{x-2} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 2e^x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases},$$

determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en los que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

8. *a*) Se sabe que el 20 % de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80 % sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50 % ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90 % ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?

a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?

b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80 % de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

n	**k** \ **p**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
4	**0**	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

Junio de 2021

1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\det A^T = 2+1-2 = 1}$

b) $XA + 3A = B$

$XA = B - 3A$

$XAA^{-1} = (B-3A)A^{-1}$

$\boxed{X = (B-3A)A^{-1}}$

Calculamos $B-3A$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -5 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Cálculo de A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X

$$\boxed{X = (B-3A)A^{-1}} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -5 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{2}$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 1 & a-1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

a) Rango de M

$|M| = 2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 1$

Si $a \neq 1 \Rightarrow$ rango $M = 3$

Si $a = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rango $M = 2$

Rango de $\tilde{M}$

Si $a = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_2+F_3}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$ rango $\tilde{M} = 3$

Discusión

Si $a \neq 1 \Rightarrow$ rango $M = 3 =$ rango $\tilde{M} =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

$a = 1 \Rightarrow$ rango $M = 2 \neq 3 =$ rango $\tilde{M} \Rightarrow$ S.I.

donde hemos usado el teorema de Rouché-Fröbenius

b) Resolución para $a = 0$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$

De [2]: $z = -1$

De [3]: $y = -1$

Sustituimos en [1]: $x = 1 - (-1) - (-1) = 3$

$\boxed{\text{Solución: } (x, y, z) = (3, -1, -1)}$

3 a) $\int \frac{2}{3+e^x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t=e^x \\ dt = e^x dx = t\,dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t} \end{array}\right] =$

Cipri

$= \int \frac{2}{3+t}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{2}{(3+t)\,t}\,dt \underset{1}{=}$

Descomponemos en fracciones simples:

$\frac{2}{(3+t)t} = \frac{A}{3+t} + \frac{B}{t} = \frac{At + B(3+t)}{(3+t)t}$

$2 = At + B(3+t)$

$t=0 \Rightarrow 2 = 3B \Rightarrow B = \frac{2}{3}$

$t=-3 \Rightarrow 2 = -3A \Rightarrow A = -\frac{2}{3}$

Integral

$\underset{1}{=} \int \frac{-\frac{2}{3}}{3+t}\,dt + \int \frac{\frac{2}{3}}{t}\,dt = -\frac{2}{3}\ln|3+t| + \frac{2}{3}\ln|t| =$

$= \boxed{-\frac{2}{3}\ln|3+e^x| + \frac{2}{3}\ln|e^x| + C}$

$= \boxed{-\frac{2}{3}\ln|3+e^x| + \frac{2x}{3} + C}$

b) $\int \frac{-x+1}{x^2+3}\,dx = \int \frac{-x}{x^2+3}\,dx + \int \frac{1}{x^2+3}\,dx =$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx + \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)^2+1}\,dx =$

$= \boxed{-\frac{1}{2}\ln|x^2+3| + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}x}{3}\right) + C}$

4 a) $P(1,0,1)$, $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$, $d(P,r) = \frac{|\vec{u}_r \times \vec{AP}|}{|\vec{u}_r|}$, $A \in r$

$\vec{u}_r = (1,1,-1)$, $A(-1,0,1) \in r$

$\vec{AP} = (1,0,1) - (-1,0,1) = (2,0,0)$, $\vec{u}_r \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{j} - 2\vec{k} =$

$= (0,-2,-2) \Rightarrow \boxed{d(P,r) = \frac{\sqrt{0^2+(-2)^2+(-2)^2}}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}\,u}$

Cipri

De otra forma:

$d(P,r) = d(P,P')$ donde P' es el punto de corte de r y π' (plano $\perp$ a r t.q. $P \in \pi'$)

(1) Calculamos π'

$\pi' \equiv \{P, \vec{u}_r\} \equiv \overrightarrow{PP_{\pi'}} \cdot \vec{u}_r = 0$ donde $P_{\pi'} \in \pi'$ es un punto genérico

$\overrightarrow{PP_{\pi'}} = (x,y,z) - (1,0,1) = (x-1, y, z-1)$

$\overrightarrow{PP_{\pi'}} \cdot \vec{u}_r = 0 \Rightarrow (x-1, y, z-1)\cdot(1,1,-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 1 + y - z + 1 = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x + y - z = 0$

(2) Calculamos P'

$r \equiv \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = y \Rightarrow x - y = -1 \\ -y = z-1 \Rightarrow y + z = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow P'\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(3) Distancia

$$d(P,r) = d(P,P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}\,u}$$

$\overrightarrow{PP'} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) - (1,0,1) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

b) $s \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 1 - 2a\lambda \\ z = 0 + 2\lambda \end{cases}$, $t \equiv \dfrac{x-1}{a} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$

¿a para que $s \parallel t$?

$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_s \parallel \vec{u}_t \Rightarrow \dfrac{2}{a} = \dfrac{-2a}{-1} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow a = 1 \\ \text{y además } P_s(0,1,0) \notin r \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{para } a = 1,\ s \parallel t}$

$\boxed{5}$ $A(0,0,1), B(2,1,0), C(1,1,1), D(1,1,2)$

a) $\overrightarrow{AB} = (2,1,0) - (0,0,1) = (2,1,-1)$

$\overrightarrow{AC} = (1,1,1) - (0,0,1) = (1,1,0)$

$\overrightarrow{AD} = (1,1,2) - (0,0,1) = (1,1,1)$

$$\boxed{V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]\right| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\, u^3}$$

b) b1) π plano t.g. $A, B, C \in \pi$

$$\pi \equiv \{A, \vec{AB}, \vec{AC}\} \equiv \det\begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - y + z - 1 = 0}$$

b2) r recta t.g. $\begin{cases} r \perp \pi \\ D \in r \end{cases} \Rightarrow r \equiv \{D, \vec{n}_\pi\}$

$$\boxed{r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}}$$

$\boxed{6}$ a) $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$

(1) $f(1) = 2$

(2) la pendiente de la recta tangente a f en $x = 1$ es $1 \Rightarrow f'(1) = 1$

(1) $f(1) = 2 \Rightarrow a - 2 - 1 + b = 2 \Rightarrow a + b = 5$

(2) $f'(x) = 3ax^2 - 4x - 1$

$f'(1) = 3a - 4 - 1 = 1 \Rightarrow 3a = 6$

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 3a = 6 \Rightarrow a = 2 \end{cases} \quad b = 3$$

Solución: para $(a,b) = (2,3)$, $f(x)$ cumple lo que se pide
$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - x + 3$$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$

¿a y b para que f sea continua y derivable en $x = 0$?

Continuidad en $x = 0$: ¿$\exists \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} (x^2 - ax + 1) = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} be^x = b = f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow b = 1 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 0$$

Derivabilidad en $x=0$: ¿$\exists f'(0)$?

$f'_-(0) = -a$

$y = x^2 - ax + 1$

$y' = 2x - a$

$f'_+(0) = b$

$y = be^x$

$y' = be^x$

$\Rightarrow -a = b \Rightarrow a = -b \Rightarrow a = -1$

para que f sea derivable en $x=0$

$\boxed{\text{Solución: para } (a,b) = (-1,1),\ f(x) \text{ es continua y derivable en } x=0}$

$\boxed{7}$ a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2}-1}{2x-4} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2}}{2} = \dfrac{1}{2}$

regla de L'Hôpital

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x < 1 \\ \dfrac{2x-1}{x-2} & 1 \leq x \leq 3 \\ 2e^x & x > 3 \end{cases}$

b1) $\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}}$ ya que $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$ no está definida en $x=2$ y estamos considerando dicha función en $x \in [1,3]$

b2) Continuidad en $x=1$: ¿$\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$?

$\lim\limits_{x\to 1^-} (x^2-1) = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-1}{x-2} = \dfrac{1}{-1} = -1 = f(1)$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x) \Rightarrow f$ no es continua en $x=1$ y presenta una discontinuidad de salto finito.

Continuidad en $x=3$: ¿$\exists \lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$?

$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2x-1}{x-2} = \dfrac{5}{1} = 5 = f(3)$

$\lim\limits_{x\to 3^+} 2e^x = 2e^3$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 3} f(x) \Rightarrow f$ no es continua en $x=3$ y presenta una discontinuidad de salto finito

Discontinuidad en $x=2$

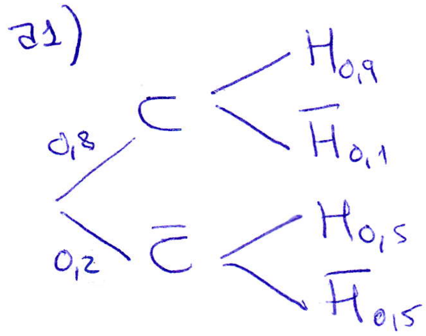
Como $\nexists f(2)$, $f(x)$ tiene en $x=2$ una discontinuidad de tipo infinito

8 a) C = usuario que comparte fotografías

$\overline{C}$ = " que no comparte fotografías

H = " que ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos

a1)



$$\boxed{P(H)} = P(C)P(H/C) + P(\overline{C})P(H/\overline{C}) =$$

$$= 0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 = \boxed{0{,}82}$$

a2) $$\boxed{P(C/\overline{H})} = \frac{P(C \cap \overline{H})}{P(\overline{H})} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}1}{1 - 0{,}82} = \boxed{0{,}44}$$

b) X = el algoritmo identifica correctamente a la persona

$X \sim B(4,\ 0{,}8)$

b1) $\boxed{P(X=4) = 0{,}4096}$ mirando en la tabla

b2) $$\boxed{P(X \geq 1)} = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) =$$

$$= 0{,}0256 + 0{,}1536 + 0{,}4096 + 0{,}4096 = \boxed{0{,}9984}$$

O también

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0) =$$

$$= 1 - 0{,}0016 = 0{,}9984$$