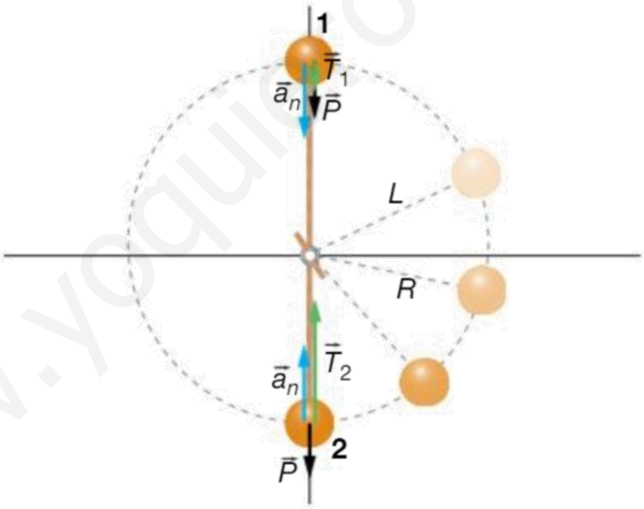
DINÁMICA

Aplicación de las leyes de Newton. Movimiento circular uniforme

1. Se hace girar un cuerpo de masa m atado al extremo de una cuerda de longitud L de modo que describe un M.C.U. con velocidad v en un plano vertical. Calcula la tensión de la cuerda en los puntos más alto y más bajo de la trayectoria. ¿Cuál es la velocidad mínima en el punto más alto para que el cuerpo no caiga? ¿Y la velocidad máxima que se puede alcanzar en el punto más bajo?

Sobre el cuerpo actúan su peso y la tensión de la cuerda. Como se trata de un M.C.U. la aceleración solo tiene componente normal (o centrípeta) que, además, mantiene su módulo constante. Su expresión es:

$$a_n = \frac{v^2}{L}$$



La 2ª Ley de Newton en el punto 1 es:

$$F_c = P + T_1 = m \cdot a_n$$

$$mg + T_1 = m \cdot \frac{v^2}{L} \rightarrow T_1 = m\frac{v^2}{L} - mg$$

$$\rightarrow \boxed{T_1 = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)}$$

La 2ª Ley de Newton en el punto 2 es:

$$F_c = T_2 - P = m \cdot a_n$$

$$T_2 - mg = m\frac{v^2}{L} \rightarrow T_2 = m\frac{v^2}{L} + mg$$

$$\rightarrow \boxed{T_2 = m\left(\frac{v^2}{L} + g\right)}$$

La tensión en la cuerda nunca puede ser negativa. Así, la velocidad mínima en el punto 1 para que el cuerpo no caiga es aquella para la que $T_1 = 0$:

$$T_1 = 0 \rightarrow m\left(\frac{v^2}{L} - g\right) = 0 \rightarrow \frac{v^2}{L} - g = 0$$

$$\rightarrow \frac{v^2}{L} = g \rightarrow v^2 = gL \rightarrow \boxed{v_{min} = \sqrt{g \cdot L}}$$

Si la tensión máxima que soporta la cuerda es Tmax, la velocidad máxima que podrá tener el cuerpo en el punto 2 (punto de máxima tensión) para no romper la cuerda es:

$$T_{max} = m\left(\frac{v_{max}^2}{L} + g\right) \rightarrow \frac{T_{max}}{m} = \frac{v_{max}^2}{L} + g$$

$$\rightarrow \frac{v_{max}^2}{L} = \frac{T_{max}}{m} - g \rightarrow v_{max} = \sqrt{L\left(\frac{T_{max}}{m} - g\right)}$$

2. Una cuerda ($l = 80cm$) se rompe al colgar de ella un cuerpo de 15kg. Calcula la velocidad máxima con que puede girar verticalmente una piedra de 250g sujeta a su extremo sin que se rompa, y la tensión de la cuerda en el punto más alto de su trayectoria.

Según lo explicado en detalle en el ejercicio anterior, la tensión máxima que soporta la cuerda es la del punto más bajo. Esta se corresponde cuando la tensión es igual al peso máximo que puede soportar justo antes de romperse; es decir, aplicando la segunda ley de Newton:

$$T_2 - p_2 = 0 \;\rightarrow\; T_2 = p_2 = m \cdot g = 15 \cdot 9{,}8 = 147N$$

Pero ahora tenemos que calcular la velocidad máxima para una masa de 250 g. Esta velocidad la alcanza en el punto de máxima tensión; el punto más bajo. Así, su valor será:

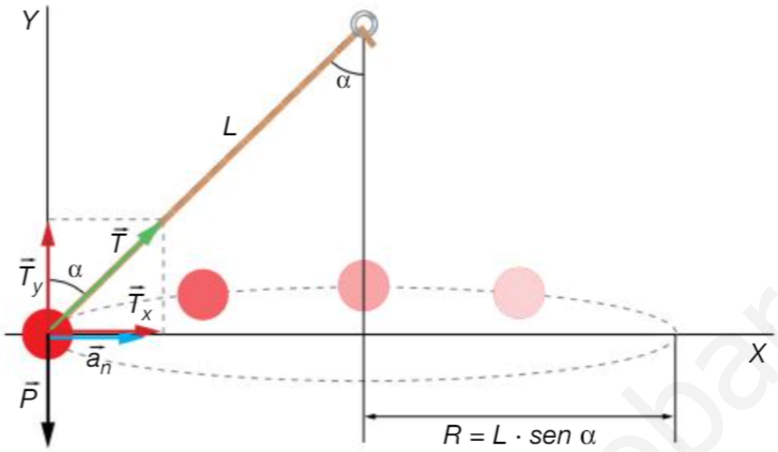
$$v_{max} = \sqrt{L\left(\frac{T_{max}}{m} - g\right)} = \sqrt{0{,}8\left(\frac{147}{0{,}25} - 9{,}8\right)} = 21{,}51m/s$$

Por tanto, la tensión en el punto más alto llevando esa velocidad será:

$$p_1 + T_1 = m \cdot a_n \;\rightarrow\; T_1 = m \cdot a_n - m \cdot g$$

$$T_1 = m \cdot \frac{v^2}{R} - m \cdot g = 0{,}25 \cdot \frac{21{,}51^2}{0{,}8} - 0{,}25 \cdot 9{,}8 = 142{,}14N$$

3. Un cuerpo de masa m se une al techo mediante una cuerda inextensible, y se le hace describir un M.C.U. en un plano horizontal con la cuerda formando un ángulo α con la vertical. Calcula la tensión de la cuerda y la velocidad del movimiento, en función de los parámetros del sistema.



El dispositivo descrito se llama péndulo cónico porque la cuerda describe una superficie cónica. Aplicando la 2ª Ley de Newton:

EJE X: $T_x = m \cdot a_n \longrightarrow T \operatorname{sen} \alpha = m \cdot a_n$

EJE Y: $T_y - P = 0 \longrightarrow T \cos \alpha = m \cdot g$

$$\boxed{T = \frac{m \cdot g}{\cos(\alpha)}}$$

Dividimos ambas expresiones para calcular la velocidad:

$$\frac{\cancel{T} \operatorname{sen} \alpha}{\cancel{T} \cos \alpha} = \frac{\cancel{m} \cdot a_n}{\cancel{m} \cdot g} \longrightarrow \tan(\alpha) = \frac{a_n}{g} = \frac{v^2/R}{g}$$

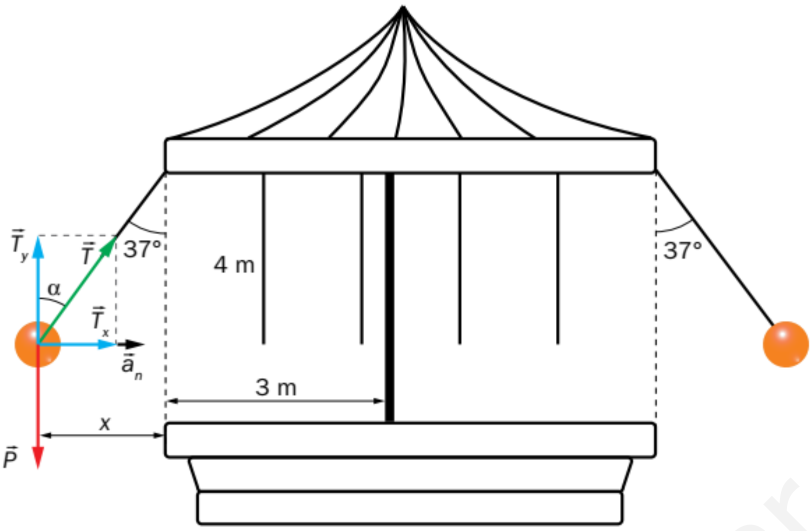
$$\longrightarrow v^2 = R g \tan(\alpha) \longrightarrow v = \sqrt{R g \tan(\alpha)}$$

Del dibujo: $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{R}{L} \longrightarrow R = L \operatorname{sen}(\alpha)$ (porque no me dan R, sino L)

$$\Longrightarrow \boxed{v = \sqrt{L \operatorname{sen}(\alpha)\, g \tan(\alpha)}}$$

4. Un tiovivo consta de un aro horizontal de 3m de radio del que cuelgan cuerdas de 4m de longitud. Si en su extremo se sienta un hombre de 80kg, ¿con qué velocidad angular girará el tiovivo para que la cuerda forme 37° con la vertical?

El movimiento del tiovivo es el de un péndulo cónico, cuyo esquema de fuerzas es:



Aplicando la 2ª Ley de Newton:

EJE Y: $T_y - p = 0 \rightarrow T_y = p \rightarrow T\cos\alpha = mg$

$$\rightarrow T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{80 \cdot 9'8}{\cos 37°} = 981{,}67\ N$$

EJE X: $F_c = T_x = m a_n \rightarrow T \operatorname{sen}\alpha = m\frac{v^2}{R} = m\frac{(\omega R)^2}{R}$

$$\rightarrow T\operatorname{sen}\alpha = m\omega^2 R \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{T\operatorname{sen}\alpha}{mR}}$$

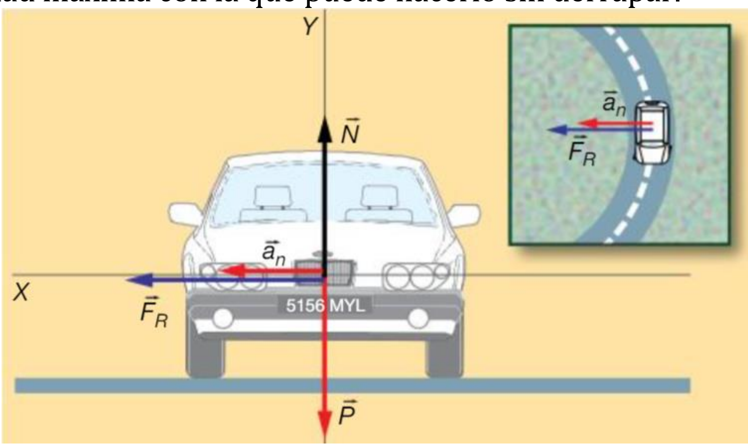
Donde R es la suma de los 3m del radio de la base más 'x':

$$\operatorname{sen} 37° = \frac{x}{4} \rightarrow x = 4 \cdot \operatorname{sen}(37°) = 2'41\ (m)$$

$$\rightarrow R = 3 + 2'71 = 5'41\ (m)$$

$$\Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{981{,}67 \cdot \operatorname{sen}(37°)}{80 \cdot 5'41}} = 1'17\ (rad/s)$$

5. Un coche de masa m describe una curva horizontal de radio R con rapidez constante, v. Si el coeficiente de rozamiento con la carretera es μ, calcula la velocidad máxima con la que puede hacerlo sin derrapar.



Al llevar un movimiento curvilíneo, el coche está sometido a una fuerza centrípeta que, en este caso, es la fuerza de rozamiento. Aplicamos la 2ª ley de Newton:

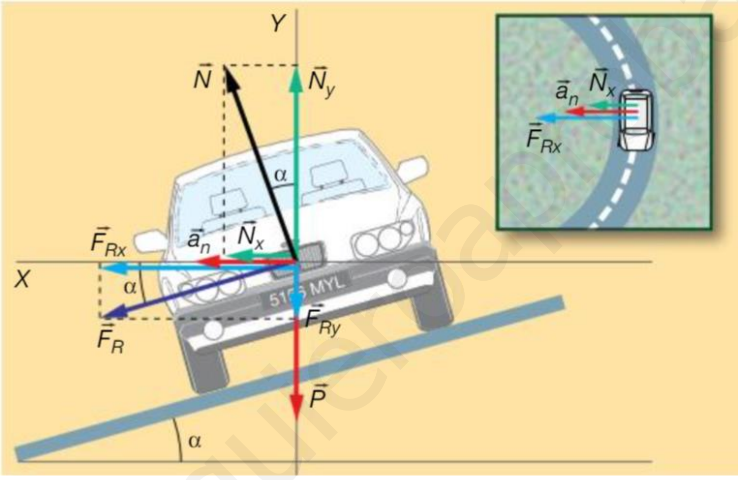
EJE Y: $N - p = 0 \rightarrow N = p = m \cdot g$

EJE X: $F_c = F_{roz} = m \cdot a_n$

$$\mu N = m\frac{v^2}{R} \rightarrow \mu \cancel{m} g = \cancel{m}\frac{v^2}{R} \rightarrow \boxed{v_{max} = \sqrt{\mu R g}}$$

6. Resuelve el ejercicio anterior, pero en el caso de una curva peraltada (inclinada respecto a la horizontal) un ángulo α.

En la curva con peralte, el rozamiento y la normal cambian de dirección, pero la fuerza centrípeta sigue siendo horizontal.



Aplicamos la 2ª ley de Newton:

EJE Y: $N_y - p - F_{roz\,y} = 0$

$N\cos\alpha - mg - \mu N \operatorname{sen}\alpha = 0$

$$N(\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha) = mg \longrightarrow N = \frac{mg}{\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha}$$

EJE X: $F_c = F_{roz\,x} + N_x = m \cdot a_n$

$$\mu N\cos\alpha + N\operatorname{sen}\alpha = m\frac{v^2}{R} \longrightarrow N(\mu\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = m\frac{v^2}{R}$$

Sustituyo 'N':

$$\frac{\cancel{m}g}{\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha}(\mu\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = \cancel{m}\frac{v^2}{R}$$

$$\longrightarrow \boxed{v_{max} = \sqrt{\frac{Rg(\mu\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)}{\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha}}}$$

Observa que si $\alpha = 0$ se obtiene la expresión de la curva plana.

7. Un vehículo circula sobre una curva peraltada de 60m de radio. Suponiendo que no existe fuerza de rozamiento, ¿cuál debe ser el ángulo de peralte para que el vehículo pueda tomar la curva a 60km/h sin derrapar? Manteniendo este ángulo, ¿con qué velocidad podría tomarla si el coeficiente de rozamiento fuese $\mu = 0{,}3$?

Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 60\frac{km}{h}\cdot\frac{1000m}{1km}\cdot\frac{1h}{3600s} = 16{,}67\frac{m}{s}$$

Aplicando la segunda ley de Newton:

EJE Y:

$$N_y - p = 0 \quad\rightarrow\quad Ncos(\alpha) = mg \;\rightarrow\; N = \frac{mg}{cos(\alpha)}$$

EJE Y:

$$N_x = ma_n \quad\rightarrow\quad Nsen(\alpha) = m\frac{v^2}{R} \rightarrow N = \frac{mv^2}{Rsen(\alpha)}$$

Igualamos ambas expresiones:

$$\frac{mg}{cos(\alpha)} = \frac{mv^2}{Rsen(\alpha)} \quad\rightarrow\quad \frac{g}{cos(\alpha)} = \frac{v^2}{Rsen(\alpha)} \quad\rightarrow\quad \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{v^2}{gR}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{v^2}{gR} \quad\rightarrow\quad \alpha = arctan\left(\frac{v^2}{gR}\right) = arctan\left(\frac{16{,}67^2}{9{,}8\cdot 60}\right) = 25{,}3°$$

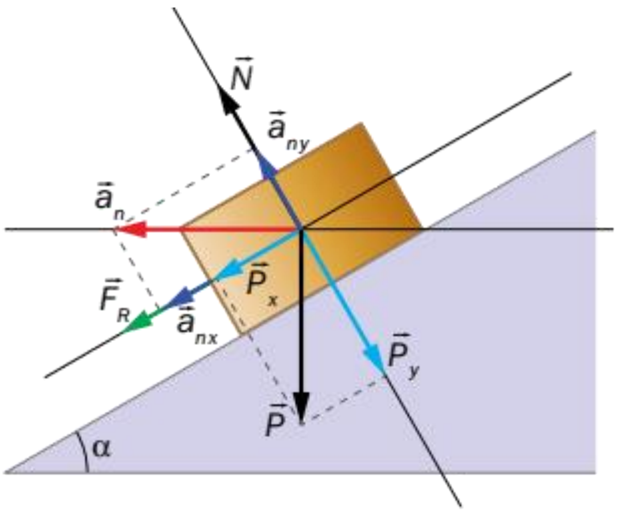
Después, según lo explicado en detalle en el ejercicio anterior, la velocidad máxima es:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{Rg(\mu\cos(\alpha) + sen(\alpha))}{\cos(\alpha) - \mu sen(\alpha)}} = \sqrt{\frac{60\cdot 9{,}8(0{,}3\cos(25{,}3°) + sen(25{,}3°))}{\cos(25{,}3°) - 0{,}3sen(25{,}3°)}} =$$

$$= 23{,}02\frac{m}{s} = 82{,}8\frac{km}{h}$$

8. El estudio de la curva peraltada se puede realizar en un sistema de referencia en el que el eje X sea paralelo al plano de peralte. Comprueba que se obtienen las mismas expresiones.

Tomando como sistema de referencia el eje X paralelo al plano del peralte, el esquema de las fuerzas y la descomposición de la aceleración normal es:



En este caso se descompone la aceleración normal.
Aplicando la 2ª ley de Newton:

EJE Y: $N - P_y = m \cdot a_{n_y} \longrightarrow N - p\cos\alpha = m \cdot a_n \cdot \operatorname{sen}\alpha$

$\longrightarrow N = m a_n \operatorname{sen}\alpha + mg\cos\alpha$

EJE X: $F_{roz} + p_x = m \cdot a_{n_x} \longrightarrow \mu N + p\operatorname{sen}\alpha = m \cdot a_n \cos\alpha$

Sustituimos 'N':

$\mu(m a_n \operatorname{sen}\alpha + mg\cos\alpha) + mg\operatorname{sen}\alpha = m a_n \cos\alpha$

$\mu m a_n \operatorname{sen}\alpha + \mu mg\cos\alpha + mg\operatorname{sen}\alpha = m a_n \cos\alpha$

Despejo 'an':

$\cancel{m}g(\mu\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = \cancel{m}a_n(\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha)$

$$\boxed{a_n = \frac{g(\mu\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)}{\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha}}$$

Y como $a_n = \frac{v^2}{R}$:

$$\frac{g(\mu\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)}{\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha} = \frac{v^2}{R} \longrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{Rg(\mu\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)}{\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha}}}$$