Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.

En una urna hay 10 bolas de las que 4 son negras y 6 son blancas. Se extraen sucesivamente 8 bolas con reemplazamiento:

a) (2 puntos) Calcule la probabilidad de que al menos 2 sean blancas.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que exactamente 5 bolas sean blancas.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3.5 puntos.

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A \cap B) = 0{,}1 \qquad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}6 \qquad P(A/B) = 0{,}5$$

Calcule:

a) (1 punto) $P(A)$

b) (1 punto) Probabilidad de que sólo ocurra B.

c) (1.5 puntos) $P(\bar{B}/\bar{A})$

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 3.5 puntos.

Al comienzo de la pandemia se vacunó a un grupo de alto riesgo formado por 800 personas contra la COVID-19. A 240 personas se les suministró la vacuna de Moderna, a 400 la vacuna de Pfizer y al resto la de Oxford. Se sabe que el 95 % de las personas a las que se les suministró la vacuna de Moderna generaron anticuerpos, siendo esta cifra de un 90 % si se les suministró la vacuna de Pfizer y de un 70 % si se les suministró la vacuna de Oxford. Calcule la probabilidad de que, elegida una persona al azar de dicho grupo de riesgo:

a) (1 punto) Se le suministrara la vacuna de Pfizer y generara anticuerpos.

b) (1 punto) No generara anticuerpos.

c) (1.5 puntos) Sabiendo que generó anticuerpos, la vacuna suministrada fuera la de Oxford.

Ejercicio 1. En una urna hay 10 bolas de las que 4 son negras y 6 son blancas. Se extraen sucesivamente 8 bolas con reemplazamiento:

a) Calcule la probabilidad de que al menos 2 sean blancas.

b) Calcule la probabilidad de que exactamente 5 bolas sean blancas.

Designamos los sucesos N = Extraer bola negra, B = Extraer bola blanca

a) Se extraen 8 bolas con reemplazamiento, siendo las experiencias independientes entre sí. Se tomará una distribución binomial $\mathrm{B}(n,p) = B(8;\ 0{,}6)$, donde se considera éxito extraer bola blanca $\left(p = \frac{6}{10} = 0.6\right)$ y fracaso extraer bola negra $(q = 0.4)$.

$$P(x \geq 2) = 1 - \big(P(x=0) + P(x=1)\big) = 1 - \binom{8}{0} 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^8 - \binom{8}{1} 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^7 =$$

$$1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}4^8 - 8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^7 = 0{,}99148032$$

b) Se toma la misma distribución binomial $\mathrm{B}(n,p) = B(8;\ 0{,}6)$:

$$P(x=5) = \binom{8}{5} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 = 56 \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}27869184$$

Ejercicio 2. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A \cap B) = 0{,}1 \qquad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}6 \qquad P(A/B) = 0{,}5$$

Calcule:

a) $P(A)$

b) Probabilidad de que sólo ocurra B.

c) $P(\bar{B}/\bar{A})$

Se consideran los datos:

$$P(A \cap B) = 0{,}1$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}6 \quad \rightarrow \quad 1 - P(A \cup B) = 0{,}6 \quad \rightarrow \quad P(A \cup B) = 0{,}4$$

$$P(A/B) = 0{,}5 \quad \rightarrow \quad \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}5 \quad \rightarrow \quad P(B) = \frac{P(A \cap B)}{0{,}5} = \frac{0{,}1}{0{,}5} \quad \rightarrow \quad P(B) = 0{,}2$$

a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$$P(A) = P(A \cap B) - P(B) + P(A \cup B) = 0{,}1 - 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}3$$

b) $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}1$

c) $P(\bar{B}/\bar{A}) = \dfrac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \dfrac{0{,}6}{1 - P(A)} = \dfrac{0{,}6}{1 - 0{,}3} = \dfrac{6}{7}$

Ejercicio 3. Al comienzo de la pandemia se vacunó a un grupo de alto riesgo formado por 800 personas contra la COVID-19. A 240 personas se les suministró la vacuna de Moderna, a 400 la vacuna de Pfizer y al resto la de Oxford. Se sabe que el 95 % de las personas a las que se les suministró la vacuna de Moderna generaron anticuerpos, siendo esta cifra de un 90 % si se les suministró la vacuna de Pfizer y de un 70 % si se les suministró la vacuna de Oxford. Calcule la probabilidad de que, elegida una persona al azar de dicho grupo de riesgo:

a) Se le suministrara la vacuna de Pfizer y generara anticuerpos.

b) No generara anticuerpos.

c) Sabiendo que generó anticuerpos, la vacuna suministrada fuera la de Oxford.

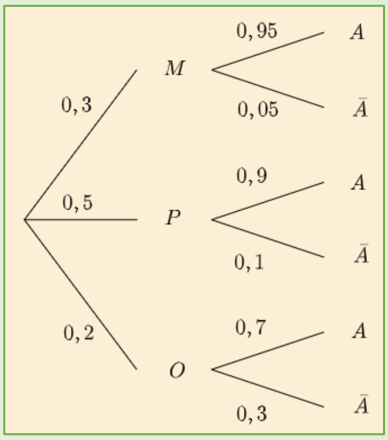
Designamos los sucesos correspondientes a haber recibido las vacunas de Moderna, Pfizer y Oxford:

$M =$ "Moderna" $\quad P =$ "Pfizer" $\quad O =$ "Oxford"

Cuyas probabilidades son:

$$P(M) = \frac{240}{800} = 0{,}3 \qquad P(P) = \frac{400}{800} = 0{,}5 \qquad P(O) = \frac{160}{800} = 0{,}2$$

Sea el suceso $A =$ "Generar anticuerpos" y $\bar{A}$ su complementario:



a) $P(P \cap A) = P(P) \cdot P(A/P) = 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}45$

b) Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(\bar{A}) = P(M) \cdot P(\bar{A}/M) + P(P) \cdot P(\bar{A}/P) + P(O) \cdot P(\bar{A}/O) =$$

$$= 0{,}3 \cdot 0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}015 + 0{,}05 + 0{,}06 = 0{,}125$$

c) Aplicando el teorema de Bayes:

$$P(O/A) = \frac{P(A/O) \cdot P(O)}{P(A)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}2}{1 - 0{,}125} = \frac{0{,}14}{0{,}875} = 0{,}16$$