TEORIA

T.1 Producto escalar de vectores. Condición de perpendicularidad y ángulo entre vectores. **(1 punto)**

T.2 Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA). Ecuaciones y gráficas de la aceleración, velocidad y espacio frente al tiempo. **(1 punto)**

CUESTIONES

C.1 Las coordenadas rectangulares de un punto son (3,2)m. Obtenga sus coordenadas polares (r, θ): **(1 punto)**

$$(x, y) \rightarrow (r, \theta)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(3m)^2+(2m)^2} = \sqrt{9m^2+4m^2} = \sqrt{13m^2} = \sqrt{13}\ m$$

$$\theta = \text{arc tg}\ \frac{y}{x} = \text{arc tg}\ \frac{2}{3} = 33{,}7^\circ$$

$$(r, \theta) = (\sqrt{13}\ m,\ 33{,}7^\circ)$$

C.2. Dados los vectores $\vec{A} = -5\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ y $\vec{B} = -6\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ calcule su producto vectorial **(1 punto).**

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 4 & 5 \\ -6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (16-10)\vec{i} - (-20+30)\vec{j} + (-10+24)\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = 6\vec{i} - 10\vec{j} + 14\vec{k}$$

PROBLEMAS

P.1. El movimiento de una partícula viene dado por el vector posición $\vec{r}(t) = (5t^2 + 4t)\vec{i} + (3t^3)\vec{j} + 6\vec{k}$ m encuentre:

a) Vector velocidad en función de t, su módulo y el valor de ambos a los 5 s. **(1 punto).**

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(5t^2+4t)\vec{i} + (3t^3)\vec{j} + 6\vec{k}\right] m = (10t+4)\vec{i} + (9t^2)\vec{j}\ m/s$$

$$\vec{V}(5s) = 54\vec{i} + 225\vec{j}\ m/s$$

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{(10t+4)^2 + (9t^2)^2}\ m/s = \sqrt{100t^2+80t+16+81t^4}\ m/s \qquad V(5s) = \sqrt{2500+400+16+50625}\ m/s = 231{,}4\ m/s$$

b) Vector aceleración en función de t, su módulo y el valor de ambos a los 5 s. **(1 punto).**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(10t+4)\vec{i} + (9t^2)\vec{j}\ m/s\right] = 10\vec{i} + 18t\vec{j}\ m/s^2$$

$$\vec{a}(5s) = 10\vec{i} + 90\vec{j}\ m/s^2$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{10^2 + (18t)^2}\ m/s^2 = \sqrt{100+324t^2}\ m/s^2 \qquad a(5s) = \sqrt{100+324\cdot 25}\ m/s^2 = 90{,}6\ m/s^2$$

c) Módulos de la aceleración tangencial y normal a los 4 s. **(1 punto).**

$$a_T = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{81t^4+100t^2+80t+16} = \frac{324t^3+200t+80}{2\sqrt{81t^4+100t^2+80t+16}}\ ; \quad a_T(4s) = \frac{21616}{2\sqrt{22672}}\ m/s^2 = \frac{10808}{150{,}6}\ m/s^2$$

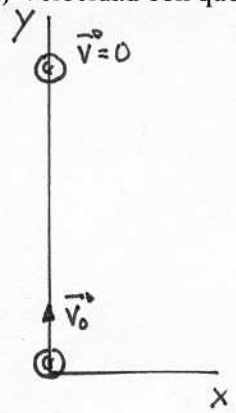
$$a_T(4s) = 71{,}8\ m/s^2 \qquad a(4s) = \sqrt{100+5184}\ m/s^2 = \sqrt{5284}\ m/s^2 = 72{,}69\ m/s^2$$

SE CUMPLE $a^2 = a_T^2 + a_N^2 \longrightarrow a_N^2 = a^2 - a_T^2 = 5284\ m^2/s^4 - 5155{,}2\ m^2/s^4 = 128{,}76\ m^2/s^4$

$$a_N(4s) = 11{,}35\ m/s^2$$

P.2. Se lanza verticalmente hacia arriba un objeto con una velocidad tal que alcanza una altura máxima de 1000m. Determine:

a) Velocidad con que se ha lanzado **(1 punto)**



EL OBJETO REALIZA UN MRUA CON $a = -g = -9{,}8\ m/s^2$

$$v = v_0 - gt \rightarrow v = v_0 - 9{,}8\ m/s^2\ t$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow y = v_0 t - 4{,}9\ m/s^2\ t^2$$

CUANDO ALCANZA LOS 1000 m SU VELOCIDAD ES CERO

$$0 = v_0 - 9{,}8\ m/s^2\ t \rightarrow v_0 = 9{,}8\ m/s^2\ t$$

$$1000\ m = 9{,}8\ m/s^2\ t^2 - 4{,}9\ m/s^2\ t^2 = 4{,}9\ m/s^2\ t^2 \rightarrow t^2 = \frac{1000\ m}{4{,}9\ m/s^2} = 204{,}08\ s^2 \rightarrow t = 14{,}3$$

LUEGO $v_0 = 9{,}8\ m/s^2 \cdot 14{,}3\ s = 140{,}1\ m/s$

$$\boxed{v_0 = 140{,}1\ m/s}$$

b) Elija un sistema de referencia y escriba las ecuaciones de $\vec{a}$, $\vec{v}$ y $\vec{r}$ **(1 punto).**

EL SISTEMA ES EL ESCOGIDO EN a)

$$\vec{a} = -g\vec{j} = -9{,}8\ \vec{j}\ m/s^2$$

$$\vec{v} = (v_0 - gt)\vec{j} = (140{,}1\ m/s - 9{,}8\ m/s^2\ t)\vec{j}$$

$$\vec{r} = (140{,}1\ m/s\ t - 4{,}9\ m/s^2\ t^2)\vec{j}$$

c) Vectores velocidad y posición a los 10s. **(1 punto)**

$$\vec{v}(10s) = (140{,}1\ m/s - 9{,}8\ m/s^2 \cdot 10\ s)\vec{j} = (140{,}1 - 98)\vec{j}\ m/s = 42{,}1\ \vec{j}\ m/s$$

$$\vec{r}(10s) = (140{,}1\ m/s \cdot 10\ s - 4{,}9\ m/s^2\ 100\ s^2)\vec{j} = (1401 - 490)\vec{j}\ m = 911\ \vec{j}\ m$$

TEORIA

T.1 Producto vectorial de vectores. Condición de paralelismo. **(1 punto)**

T.2 Movimiento rectilíneo uniforme (MRU). Ecuaciones y gráficas de la aceleración, velocidad y espacio frente al tiempo **(1 punto)**

CUESTIONES

C.1. Dados los vectores $\vec{A} = -5\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ y $\vec{B} = -6\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ calcule el ángulo que forman **(1 punto)**

CALCULEMOS EL PRODUCTO ESCALAR DE AMBOS VECTORES $\vec{A}\cdot\vec{B} = A\cdot B\cdot\cos\alpha$

LUEGO $\rightarrow$ $\cos\alpha = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A\cdot B} = \dfrac{(-5)(-6)+4\cdot 2+5\cdot 4}{\sqrt{(-5)^2+4^2+5^2}\sqrt{(-6)^2+2^2+4^2}} = \dfrac{30+8+20}{\sqrt{66}\sqrt{56}} = \dfrac{58}{\sqrt{3696}}$

$\cos\alpha = \dfrac{58\cdot\sqrt{3696}}{3696} = \dfrac{3526{,}09}{3696} = 0{,}9540 \longrightarrow \alpha = \arccos 0{,}9540 = 17{,}44^\circ$

$$\boxed{\alpha = 17{,}44^\circ}$$

C.2. Dadas las coordenadas polares de un punto (100m, 30º), calcule sus coordenadas rectangulares (x,y): **(1 punto).**

$(r,\theta) \longrightarrow (x,y)$

$x = r\cos\theta = 100\,m\,\cos 30^\circ = 100\,m\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}\ m$

$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = 100\,m\,\mathrm{sen}\,30^\circ = 100\,m\,\frac{1}{2} = 50\,m$

$$(x,y) \equiv (50\sqrt{3}, 50)\,m$$

PROBLEMAS

P.1 El movimiento de una partícula viene dado por el vector posición $\vec{r}(t) = (4t^2 + t)\vec{i} + (2t^3)\vec{j} + 4\vec{k}$ m encuentre:

a) Velocidad media en los 2 primeros segundos. **(1 punto).**

$\vec{V_m} = \dfrac{\vec{r}(2s) - \vec{r}(0s)}{\Delta t} = \dfrac{(18\vec{i}+16\vec{j}+4\vec{k}\ m) - (4\vec{k}\ m)}{2s} = \dfrac{18\vec{i}+16\vec{j}\ m}{2\ s} = 9\vec{i}+8\vec{j}\ m/s$

$$\boxed{\vec{V_m} = 9\vec{i} + 8\vec{j}\ m/s}$$

b) Producto escalar de $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ **(1 punto).**

$\vec{v} = (8t+1)\vec{i} + (6t^2)\vec{j}\ m/s$

$\vec{r}\cdot\vec{v} = \left[(4t^2+t)\vec{i} + (2t^3)\vec{j} + 4\vec{k}\ m\right]\cdot\left[(8t+1)\vec{i} + (6t^2)\vec{j}\ m/s\right] =$

$= (4t^2+t)(8t+1) + (2t^3)(6t^2)\ m^2/s = 32t^3 + 8t^2 + 4t^2 + t + 12t^5\ m^2/s = 12t^5 + 32t^3 + 12t^2 + t\ m^2/s$

c) Aceleración media en los 2 primeros segundos. **(1 punto).**

$\vec{a_m} = \dfrac{\vec{v}(2s) - \vec{v}(0s)}{\Delta t} = \dfrac{(17\vec{i}+24\vec{j}\ m/s) - \vec{i}\ m/s}{2\,s} = \dfrac{16\vec{i}+24\vec{j}\ m/s}{2\,s}$

$$\boxed{\vec{a_m} = 8\vec{i} + 12\vec{j}\ m/s^2}$$

P.2 Dados los vectores $\vec{A} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$ y $\vec{B} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ calcule

a) Módulo y cosenos directores de ambos vectores. **(1 punto).**

$$|\vec{A}| = \sqrt{25+36+9} = \sqrt{70} \qquad |\vec{B}| = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{5}{\sqrt{70}} = \frac{5\sqrt{70}}{70} = \frac{\sqrt{70}}{14}$$

$$\cos\beta = \frac{A_y}{A} = -\frac{6}{\sqrt{70}} = \frac{-6\sqrt{70}}{70}, \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{A} = \frac{3}{\sqrt{70}} = \frac{3\sqrt{70}}{70}$$

$$\cos\alpha = \frac{B_x}{B} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\cos\beta = \frac{B_y}{B} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\cos\gamma = \frac{B_z}{B} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

b) $\vec{A} + \vec{B}$; $\vec{B} - \vec{A}$; $\vec{A} \cdot \vec{B}$ **(1 punto).**

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\vec{B} - \vec{A} = -9\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (5\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (-4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}) = -20 - 12 + 12 = -20$$

) Producto vectorial de ambos $\vec{A} \wedge \vec{B}$ y módulo de dicho producto $|\vec{A} \wedge \vec{B}|$ **(1 punto).**

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-24-6)\vec{i} - (20+12)\vec{j} + (10-24)\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -30\vec{i} - 32\vec{j} - 14\vec{k}$$

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = \sqrt{(-30)^2 + (-32)^2 + (-14)^2} = \sqrt{900 + 1024 + 196} = 46{,}04$$