

ORIENTACIONES: Comente sus planteamientos de tal modo que demuestre que entiende lo que hace. Tenga en cuenta que la extensión de sus respuestas está limitada por el tiempo y el papel de que dispone. Recuerde expresar todas las magnitudes físicas con sus unidades. Utilice el reverso de esta hoja para sucio, lo que escriba en ella no tendrá validez.

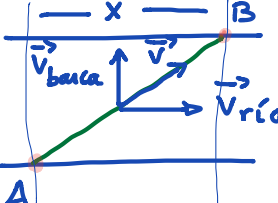
TEORIA

T.1 (1 punto). Componentes intrínsecas de la aceleración.

T.2. (1 punto). Movimiento circular uniformemente acelerado (MCUA).

CUESTIONES

C.1. (1 punto). Tengo una barca con motor que se desplaza con una velocidad de $v_{barca} = 18 \text{ km/h}$. Si el agua del río que quiero atravesar se mueve con una velocidad de $v_{rio} = 2 \text{ m/s}$, y la anchura del río es de $1,5 \text{ km}$. ¿Qué distancia (la diagonal) me desplazará la corriente del río desde mi punto de salida?



$V_{barca} = 18 \text{ km/h} = 5 \text{ m/s}$
 $\vec{V} = V_{rio} \hat{i} + V_{barca} \hat{j} = 2 \hat{i} + 5 \hat{j} \text{ m/s}$
 $x = V_{rio} t ; y = V_{barca} t \Rightarrow$
 $\Rightarrow t = \frac{1500 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 300 \text{ s} \Rightarrow x = 2 \text{ m/s} \cdot 300 \text{ s} = 600 \text{ m} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{600^2 + 1500^2} \approx 1615,55 \text{ m} \approx 1600 \text{ m}$
 Si tomamos 2 c.s.
 c.s.: Cifras significativas

C.2 Realiza los siguientes cambios de coordenadas:

a) (0,5 puntos). Pasa a coordenadas polares (4,8) m.

$r = \sqrt{x^2 + y^2} ; (x, y) = (4, 8) \text{ m} \Rightarrow r = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5} \text{ m} \approx 8,94 \text{ m} \approx 8,9 \text{ m}$
 $\theta = \arctg \frac{y}{x} = \arctg \frac{8}{4} \approx 1,1 \text{ rad} \approx 63^\circ$
 $(\pi \approx 3,14)$ Redondeo a 2 c.s.

b) (0,5 puntos). Pasa a coordenadas rectangulares (16 m, 60°).

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \Rightarrow x = 16 \cos 60^\circ \text{ m} = 8 \text{ m}$
 $y = 16 \sin 60^\circ \text{ m} \approx 13,86 \text{ m} \approx 14 \text{ m}$

PROBLEMAS

P.1. Una partícula cargada se mueve en el espacio, su trayectoria en el tiempo queda determinada por el vector de posición

$$r = 2 \cos 2t \text{ i} + 2 \sin 2t \text{ j} + 2 t \text{ k} \text{ m.}$$

- a. (1 punto). Calcula el vector velocidad y aceleración instantánea; el vector desplazamiento, el vector velocidad media y aceleración media en el intervalo de tiempo $t \in [0, \pi]$ s.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -4 \sin 2t \hat{i} + 4 \cos 2t \hat{j} + 2 \hat{k} \text{ m/s}; \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -8 \cos 2t \hat{i} - 8 \sin 2t \hat{j} \text{ m/s}^2$$

(Vector desplazamiento): $\Delta \vec{r} = \vec{r}(\pi) - \vec{r}(0) = (2\hat{i} + 2\pi\hat{k}) - 2\hat{i} = 2\pi\hat{k} \text{ m} \approx 6,3 \hat{k} \text{ m}$
 $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{2\pi\hat{k}}{\pi} = 2\hat{k} \text{ m/s}; \vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{0}}{\pi} = \vec{0} \text{ m/s}^2$
 $\Delta \vec{v} = \vec{v}(\pi) - \vec{v}(0) = (4\hat{j} + 2\hat{k}) - (4\hat{j} + 2\hat{k}) = \vec{0} \text{ m/s}$

- b. (1 punto). Obtener la ecuación de trayectoria (implícita) y su forma paramétrica en el plano XY. Y calcula el módulo $|\vec{r} \times \vec{v}|$ en cualquier instante.

$x = 2 \cos 2t, y = 2 \sin 2t$ (Ecuaciones paramétricas del plano); $x^2 = 4 \cos^2 2t, y^2 = 4 \sin^2 2t \Rightarrow x^2 + y^2 = 4(\cos^2 2t + \sin^2 2t) = 4$
 la expresión explícita de la ec. de trayectoria es $y = \pm \sqrt{4 - x^2}$ (Ecuación de trayectoria)

$$\vec{r} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 \cos 2t & 2 \sin 2t & 2t \\ -4 \sin 2t & 4 \cos 2t & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(4 \sin 2t - 8t \cos 2t) - \hat{j}(4 \cos 2t + 8t \sin 2t) + \hat{k}(8 \cos^2 2t + 8 \sin^2 2t) \frac{m^2}{s} = 4[\hat{i}(\sin 2t - 2t \cos 2t) - \hat{j}(\cos 2t + 2t \sin 2t) + 2\hat{k}] \frac{m^2}{s}$$

$$\Rightarrow |\vec{r} \times \vec{v}| = 4 \sqrt{4 + (\sin 2t - 2t \cos 2t)^2 + (\cos 2t + 2t \sin 2t)^2} = 4 \sqrt{4 + \sin^2 2t + 4t^2 \cos^2 2t - 4t \sin 2t \cos 2t + \cos^2 2t + 4t^2 \sin^2 2t + 4t \sin 2t \cos 2t} = 4 \sqrt{4 + 1 + 4t^2} = 4 \sqrt{5 + 4t^2} \frac{m^2}{s}$$

- c. (1 punto). Calcula el vector unitario tangencial ($\hat{u}_t$), el vector aceleración tangencial, normal y el radio de curvatura en cualquier instante y en el instante $t = \pi$ s.

$$\hat{u}_t = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2 \sin 2t \hat{i} + 2 \cos 2t \hat{j} + \hat{k}); |\vec{v}| = \sqrt{4^2 \sin^2 2t + 4^2 \cos^2 2t + 4} \frac{m}{s} = \sqrt{20} \frac{m}{s} = 2\sqrt{5} \frac{m}{s}$$

$$\vec{a}_t = a_t \hat{u}_t; a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0 \text{ m/s}^2; \vec{a} = \vec{a}_n = -8(\cos 2t \hat{i} + \sin 2t \hat{j}) \frac{m}{s^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}; a_n = 8 \sqrt{\cos^2 2t + \sin^2 2t} \frac{m}{s^2} = 8 \frac{m}{s^2} \Rightarrow \rho = \frac{(2\sqrt{5})^2}{8} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ m}$$

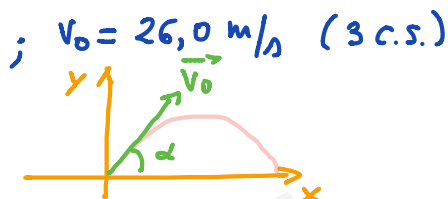
Para cualquier instante

P.2 Se lanza un objeto esférico con una velocidad de 26,0 m/s formando un ángulo de 30° con la horizontal. Calcule:

- a) (1 punto). Ecuaciones paramétricas del movimiento, ecuación de la trayectoria y ecuaciones de la velocidad.

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

Ecuaciones paramétricas



$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - g t$$

Ecuación de velocidades

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow y = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) \Rightarrow y = x \tan \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

Ecuación de trayectorias

- b) (1 punto). Alcance, altura máxima, tiempo de vuelo. Velocidad y su módulo en el momento del impacto.

$$(y=0) \Rightarrow 0 = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} \quad (\text{Tiempo que se encuentra en el aire})$$

$$x = (v_0 \cos \alpha) t \Rightarrow x_{\text{máx}} = v_0 \cos \alpha \left(\frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} \right) = \frac{2 v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\Rightarrow x_{\text{máx}} = \frac{26,0^2 \sin 60^\circ}{9,81} \approx 59,7 \text{ m}$$

$$(y_{\text{máx}}); \quad v_y = 0 \text{ m/s} \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \Rightarrow y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} \Rightarrow y_{\text{máx}} = \frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{2 \cdot 9,81} \cdot (26,0)^2 \cdot \sin^2 30^\circ \approx 8,62 \text{ m}; \quad t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2 \cdot 26,0 \cdot \sin 30^\circ}{9,81} \approx 2,65 \text{ s}$$

- c) (1 punto). La velocidad con que debería haberse lanzado para alcanzar un agujero situado a 100 m.

$$\vec{v} = v_0 \cos \alpha \hat{i} + (v_0 \sin \alpha - g t) \hat{j} = 26,0 \cdot \cos 30^\circ \hat{i} + (26,0 \sin 30^\circ - 9,81 \cdot 2,65) \hat{j} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v} \approx 22,5 \hat{i} - 13,0 \hat{j} \text{ m/s};$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{22,5^2 + 13,0^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 26,0 \text{ m/s}$$

$$(x=100 \text{ m}) \quad x = t v_0 \cos \alpha$$

$$t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} \quad (\text{tiempo en vuelo})$$

$$x = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} v_0 \cos \alpha \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{g x}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 100}{\sin 60^\circ}} \approx 33,6 \text{ m/s}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Datos para todos los problemas y cuestiones: $g=9,81 \text{ m/s}^2$