Nombre: ____

ORIENTACIONES: Comente sus planteamientos de tal modo que demuestre que entiende lo que hace. Tenga en cuenta que la extensión de sus respuestas está limitada por el tiempo y el papel de que dispone. Recuerde expresar todas las magnitudes físicas con sus unidades.

TEORIA

T.1. Producto escalar de vectores. Condición de perpendicularidad. **(1 punto).**

T.2. Componentes intrínsecas de la aceleración. Significado físico. **(1 punto).**

CUESTIONES

C.1. El vector de posición de una partícula en el instante inicial es $\boldsymbol{r}=3\,\boldsymbol{i}-4\,\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ m. Calcula el producto mixto: $\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A})$, siendo $\boldsymbol{A}$ un vector cualquiera. **(1 punto).**

SI LLAMAMOS $\vec{P}=\vec{r}\times\vec{A}$ ENTONCES $\vec{P}\perp\vec{r}$ y $\vec{P}\perp\vec{A}$

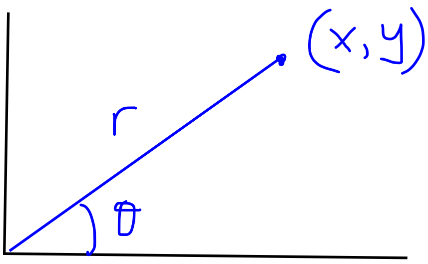
CON ESTO $\vec{r}\cdot(\vec{r}\times\vec{A})=\vec{r}\cdot\vec{P}$ y COMO $\vec{P}\perp\vec{r}\rightarrow\vec{r}\cdot\vec{P}=0\rightarrow\vec{r}(\vec{r}\times\vec{A})=0$

OTRA FORMA $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$

$$\vec{r}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-4&1\\A_x&A_y&A_z\end{vmatrix}=(-4A_z-A_y)\vec{i}-(3A_z-A_x)\vec{j}+(3A_y+4A_x)\vec{k}$$

$$\vec{r}\cdot(\vec{r}\times\vec{A})=3(-4A_z-A_y)+4(3A_z-A_x)+(3A_y+4A_x)=\cancel{-12A_z}\cancel{-3A_y}+\cancel{12A_z}\cancel{-4A_x}+\cancel{3A_y}+\cancel{4A_x}=0$$

C.2. Una partícula de 23,2 kg se encuentra en el punto (20,35 ; 15,02)m de un sistema cartesiano. Encuentre sus coordenadas polares. **(1 punto).**



$(x,y)\longrightarrow(r,\theta)$

$x=20{,}35\text{ m}\quad y=15{,}02\text{ m}$

$$r=\sqrt{(20{,}35\text{ m})^2+(15{,}02\text{ m})^2}=25{,}29\text{ m}$$

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\operatorname{arctg}\frac{15{,}02\,\cancel{m}}{20{,}35\,\cancel{m}}=\operatorname{arctg}0{,}7381=36{,}4^\circ$$

$(r,\theta)=(25{,}29\text{ m};\,36{,}4^\circ)$

PROBLEMAS

P.1.: Definamos el vector *cantidad de movimiento* como $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$, siendo m la masa de una partícula, que para este caso, tendrá un valor de $m=3$ kg. El vector de posición de dicha partícula en un instante de tiempo es $\boldsymbol{r}=(1+\sqrt{2})\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\,\boldsymbol{j}$ m, y su vector velocidad en ese mismo instante $\boldsymbol{v}=-2\sqrt{2}\,\boldsymbol{i}+2\sqrt{2}\,\boldsymbol{j}$ m/s. Calcula:

a) El momento angular de la partícula ($\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$). **(1 punto).** $\vec{p}=m\vec{v}=3\,kg(-2\sqrt{2}\,\vec{i}+2\sqrt{2}\,\vec{j})\,m/s=-6\sqrt{2}\,\vec{i}+6\sqrt{2}\,\vec{j}\ kg\,m/s$

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\(1+\sqrt{2})m&(\sqrt{2})m&0\\-6\sqrt{2}\,kg\,m/s&6\sqrt{2}\,kg\,m/s&0\end{vmatrix}=6\sqrt{2}(1+\sqrt{2})+6\sqrt{2}\sqrt{2}\ \vec{k}\ kg\,m^2/s$$

$$\vec{L}=(6\sqrt{2}+12+12)\vec{k}\ kg\,m^2/s=6(4+\sqrt{2})\vec{k}\ kg\,m^2/s$$

si tomamos $\sqrt{2}=1{,}41$ $\quad\vec{L}=(6\cdot5{,}41)\vec{k}\ kg\,m^2/s=32{,}5\,\vec{k}\ kg\,m^2/s$

b) Calcula el ángulo entre $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{v}$. **(1 punto).**

PARTIMOS DE $\vec{r}\cdot\vec{v}=|\vec{r}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha\rightarrow\cos\alpha=\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{|\vec{r}||\vec{v}|}$

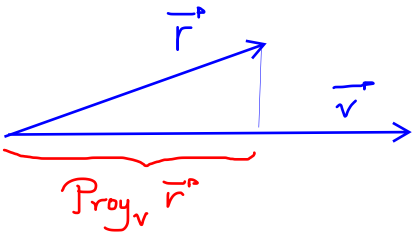
$$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2m^2+\sqrt{2}^2m^2}=\sqrt{1+2\sqrt{2}+2+2}\ m=\sqrt{5+2\sqrt{2}}\ m=2{,}8\ m$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(-2\sqrt{2})^2m^2/s^2+(2\sqrt{2})^2m^2/s^2}=\sqrt{(8+8)\,m^2/s^2}=\sqrt{16}\ m/s=4\ m/s$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{|\vec{r}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{(1+\sqrt{2})(-2\sqrt{2})+\sqrt{2}(2\sqrt{2})\ \cancel{m^2/s}}{2{,}8\,\cancel{m}\cdot4\,\cancel{m/s}}=\frac{-2\sqrt{2}-\cancel{4}+\cancel{4}}{11{,}2}=-\frac{2{,}82}{11{,}2}=-0{,}2518$$

$$\alpha=\arccos(-0{,}2518)=104{,}6^\circ$$

c) La proyección del vector ***r*** en la dirección de ***v***. Y los cosenos directores de ***v***. **(1 punto)**.



$$Proy_{\vec v}\,\vec r = \vec r\cdot\vec u_v = \vec r\cdot\frac{\vec v}{v} = \frac{\vec r\cdot\vec v}{v}$$

$$Proy_{\vec v}\,\vec r = \frac{-2\sqrt{2}\ m^{\cancel{2}}/\cancel{s}}{4\ \cancel{m}/\cancel{s}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ m$$

COSENOS DIRECTORES DE $\vec v$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{v_x}{v} = \dfrac{-2\sqrt{2}\ \cancel{m/s}}{4\ \cancel{m/s}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\[2ex] \cos\beta = \dfrac{v_y}{v} = \dfrac{2\sqrt{2}\ \cancel{m/s}}{4\ \cancel{m/s}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

P.2.: Dadas las ecuaciones paramétricas del movimiento de una partícula

$$x(t)=0{,}35t \ \text{m}$$
$$y(t)=2{,}25-5{,}00t^2 \ \text{m}$$

a) Escriba los vectores de posición, velocidad y aceleración de la partícula en cualquier instante y el valor de los mismos para t=0,35s **(1 punto)**.

$$\vec r(t) = x(t)\,\vec i + y(t)\,\vec j = (0{,}35t)\,\vec i + (2{,}25-5{,}00t^2)\,\vec j\ m$$

$$\vec v(t) = \frac{d\vec r(t)}{dt} = 0{,}35\,\vec i - 10{,}0t\,\vec j\ m/s \quad // \quad \vec a(t) = \frac{d\vec v(t)}{dt} = -10{,}0\,\vec j\ m/s^2$$

$$\vec r(0{,}35s) = (0{,}35\cdot 0{,}35)\,\vec i + (2{,}25-5{,}00\cdot 0{,}35^2)\,\vec j\ m = (0{,}12)\,\vec i + (2{,}25-5{,}00\cdot 0{,}12)\,\vec j\ m$$

$$\vec r(0{,}35s) = 0{,}12\,\vec i + 1{,}65\,\vec j\ m$$

$$\vec v(0{,}35s) = 0{,}35\,\vec i - 3{,}5\,\vec j\ m/s$$

$$\vec a(0{,}35s) = -10{,}0\,\vec j\ m/s$$

b) Vectores aceleración tangencial y normal a los 0,35s **(1 punto)**.

$$\vec a_T = a_T\,\vec u_T \begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{0{,}35^2+10^2t^2}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{0{,}12+100t^2}\right) = \dfrac{\overset{1}{\cancel{200}}\,t}{\cancel{2}\sqrt{0{,}12+100t^2}}\ m/s^2 \\[2ex] \vec u_T = \dfrac{\vec v}{v} = \dfrac{0{,}35\,\vec i - 10{,}0t\,\vec j\ \cancel{m/s}}{\sqrt{0{,}12+100t^2}\ \cancel{m/s}} \end{cases}$$

$$\vec a_T = \frac{100t}{\sqrt{0{,}12+100t^2}}\cdot\frac{(0{,}35\,\vec i - 10{,}0t\,\vec j)}{\sqrt{0{,}12+100t^2}}\ m/s^2 = \frac{100t(0{,}35\,\vec i - 10{,}0t\,\vec j)}{(0{,}12+100t^2)}\ m/s^2$$

$$\vec a = \vec a_T + \vec a_N \qquad \vec a_N = (-10{,}0\,\vec j) - \frac{100t(0{,}35\,\vec i - 10{,}0t\,\vec j)}{(0{,}12+100t^2)}\ m/s^2$$

$$\vec a_N = \vec a - \vec a_T \qquad \vec a_N = -\frac{35t}{(0{,}12+100t^2)}\,\vec i - 10{,}0\left(1-\frac{100t}{(0{,}12+100t^2)}\right)\vec j\ m/s^2$$

$$\vec a_N = -\frac{1}{(0{,}12+100t^2)}\left(35t\,\vec i - 1{,}2\,\vec j\right)\ m/s^2$$

VALORES PARA $t=0{,}35s$ AL FINAL DEL EXAMEN

c) Radio de curvatura a los 0,35s. Ecuación de la trayectoria (y=f(x)).¿Podrías decir el tipo de movimiento que lleva? **(1 punto)**.

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \qquad \rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{0{,}35^2 + (-3{,}5)^2 \ \cancel{m^2/s^2}}{1{,}0 \ \cancel{m/s^2}} = \frac{12{,}37}{1{,}0} m$$

$$\boxed{\rho = 12 \ m}$$

De x(t) despejamos t $\quad x = 0{,}35t \rightarrow t = \frac{x}{0{,}35} \rightarrow t^2 = \frac{x^2}{0{,}12}$

Sustituimos en y $\quad y = 2{,}25 - 5{,}00 \frac{x^2}{0{,}12} \rightarrow \boxed{y = 2{,}25 - 41{,}7x^2}$

LA TRAYECTORIA ES UNA PARABOLA → MOVIMIENTO PARABÓLICO

Las letras en negrita representan vectores

$$\vec{a}_T(0{,}35s) = \frac{100 \cdot 0{,}35}{(0{,}12 + 100 \cdot 0{,}35^2)} \left(0{,}35\vec{i} - 10{,}0 \cdot 0{,}35\vec{j}\right) m/s^2$$

$$\vec{a}_T(0{,}35s) = \frac{35}{12{,}37}\left(0{,}35\vec{i} - 3{,}5\vec{j}\right) m/s^2 = 2{,}9\left(0{,}35\vec{i} - 3{,}5\vec{j}\right) m/s^2$$

$$\vec{a}_T(0{,}35s) = 1{,}0\vec{i} - 10\vec{j} \ m/s^2$$

$$\vec{a}_N(0{,}35s) = \vec{a}(0{,}35s) - \vec{a}_T(0{,}35s)$$

$$= \left[\cancel{-10\vec{j}} \ m/s^2\right] - \left[1{,}0\vec{i} \cancel{-10\vec{j}} \ m/s^2\right] =$$

$$= -1{,}0\vec{i} \ m/s^2$$

$$\left|\vec{a}_N(0{,}35s)\right| = 1{,}0 \ m/s^2$$