

ORIENTACIONES: Comente sus planteamientos de tal modo que demuestre que entiende lo que hace. Tenga en cuenta que la extensión de sus respuestas está limitada por el tiempo y el papel de que dispone. Recuerde expresar todas las magnitudes físicas con sus unidades.

TEORIA

T.1 Producto escalar de vectores. Condición de perpendicularidad. **(1 punto)**

T.2. Componentes intrínsecas de la aceleración. Significado físico. **(1 punto)**

CUESTIONES

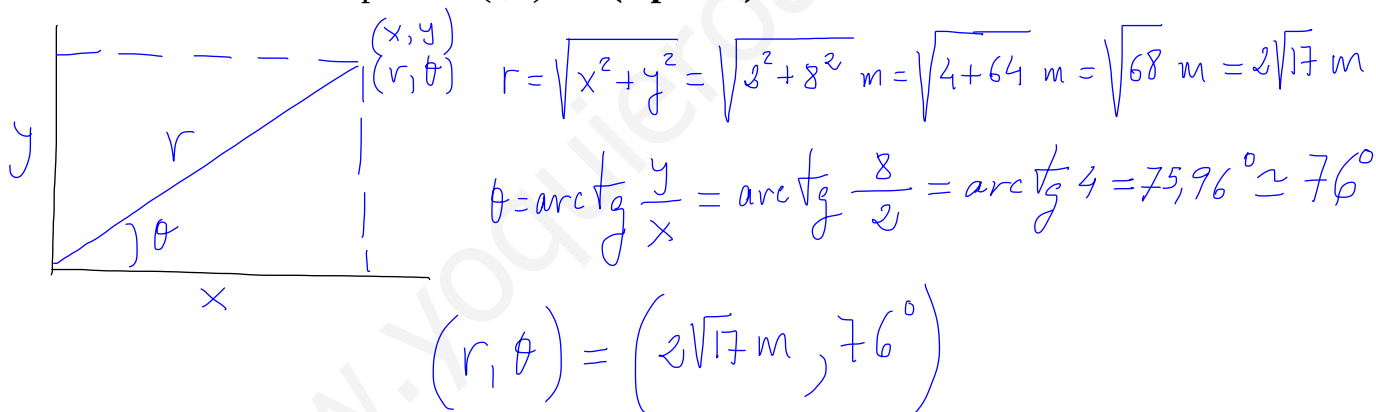
C.1 Determina si son paralelos los vectores $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ y $\vec{B} = 12\vec{i} + 18\vec{j} + 30\vec{k}$. **(1 punto)**

Si $\vec{A} \parallel \vec{B} \rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 12 & 18 & 30 \end{vmatrix} = (3 \cdot 30 - 5 \cdot 18)\vec{i} - (2 \cdot 30 - 5 \cdot 12)\vec{j} + (2 \cdot 18 - 3 \cdot 12)\vec{k} =$$

$$= (\cancel{90} - \cancel{90})\vec{i} - (\cancel{60} - \cancel{60})\vec{j} + (\cancel{36} - \cancel{36})\vec{k} = \vec{0} \rightarrow \vec{A} \parallel \vec{B} \text{ SON PARALELOS}$$

C.2 Las coordenadas cartesianas de una partícula son $(x,y)=(2,8)$. Da las coordenadas de la partícula en coordenadas polares (r,θ) . **(1 punto)**



PROBLEMAS

P.1. Dados los vectores

$$\vec{A} = -5\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k} \text{ y } \vec{B} = 8\vec{i} - 3\vec{j} + 10\vec{k}$$

Calcule:

a) $(\vec{A} + \vec{B})$; $(\vec{A} - \vec{B})$; $(3\vec{A} + 2\vec{B})$ **(1 punto)**

$$(\vec{A} + \vec{B}) = (-5\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}) + (8\vec{i} - 3\vec{j} + 10\vec{k}) = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 14\vec{k}$$

$$(\vec{A} - \vec{B}) = (-5\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}) - (8\vec{i} - 3\vec{j} + 10\vec{k}) = -13\vec{i} + 10\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$(3\vec{A} + 2\vec{B}) = 3(-5\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}) + 2(8\vec{i} - 3\vec{j} + 10\vec{k}) = (-15\vec{i} + 21\vec{j} + 12\vec{k}) + (16\vec{i} - 6\vec{j} + 20\vec{k}) =$$

$$= \vec{i} + 15\vec{j} + 32\vec{k}$$

b) Vector unitario en la dirección de $\vec{A}$. Producto escalar de ambos $\vec{A} \cdot \vec{B}$. Ángulo que forman ambos vectores. (1 punto)

$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \quad ; \quad |\vec{A}| = \sqrt{(-5)^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 49 + 16} = \sqrt{90} = 9,5$$

$$\boxed{\vec{u}_A = \frac{-5\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}}{9,5} = -0,53\vec{i} + 0,74\vec{j} + 0,42\vec{k}} \quad |\vec{B}| = \sqrt{8^2 + (-3)^2 + 10^2} = \sqrt{64 + 9 + 100} = 13,2$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = -40 - 21 + 40 = -21$$

$$\text{Como } \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{-21}{9,5 \cdot 13,2} = -0,167$$

$$\boxed{\alpha = 99,6^\circ}$$

c) Producto vectorial de los vectores $\vec{A} \times \vec{B}$ (1 punto)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 7 & 4 \\ 8 & -3 & 10 \end{vmatrix} = (70 + 12)\vec{i} - (-50 - 32)\vec{j} + (15 - 56)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = 82\vec{i} + 82\vec{j} - 41\vec{k}}$$

P.2. La posición de una partícula viene dada por las ecuaciones paramétricas: $x = 4t$ $y = 6t^2$ donde x e y vienen expresadas en metros cuando t se expresa en segundos.

a) Calcule los vectores $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ y los valores de los mismos en el instante $t = 5s$.

(1 punto).

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = (4t)\vec{i} + (6t^2)\vec{j} \text{ m}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(\vec{r}(t)) = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} = 4\vec{i} + 12t\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}(\vec{v}(t)) = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{j} = 0\vec{i} + 12\vec{j} \text{ m/s}^2 = 12\vec{j} \text{ m/s}^2$$

VALORES A LOS 5S

$$\vec{r}(5s) = 20\vec{i} + 150\vec{j} \text{ m}$$

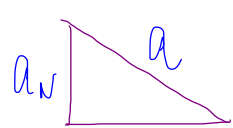
$$\vec{v}(5s) = 4\vec{i} + 60\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{a}(5s) = 12\vec{j} \text{ m/s}^2$$

b) Calcule los módulos de las componentes intrínsecas de la aceleración $a_T(t)$ y $a_N(t)$ y el radio de curvatura de la trayectoria en cualquier instante. Calcule los valores anteriores en el instante $t=5s$. (1 punto).

$$a_T = \frac{dv}{dt} \quad \left\{ \begin{array}{l} v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4^2 + (12t)^2} \text{ m/s} = \sqrt{16 + 144t^2} \text{ m/s} \\ v = 4\sqrt{1+9t^2} \text{ m/s} \end{array} \right.$$

$$a_T = \frac{d}{dt} (4\sqrt{1+9t^2} \text{ m/s}) = 4 \cdot \frac{18t}{2\sqrt{1+9t^2}} = \frac{36t}{\sqrt{1+9t^2}} \text{ m/s}^2$$



$$a^2 = a_N^2 + a_T^2 \rightarrow a_N^2 = a^2 - a_T^2$$

Como $a = 12 \text{ m/s}^2 \rightarrow a^2 = 144 \text{ m}^2/\text{s}^4$

$$a_N = \sqrt{\frac{144 + 1296t^2 - 1296t^2}{1+9t^2}} \text{ m/s}^2 = \sqrt{\frac{144}{1+9t^2}} \text{ m/s}^2 \rightarrow a_N = \frac{12}{\sqrt{1+9t^2}} \text{ m/s}^2$$

RADIO DE CURVATURA

$$\text{Como } a_N = \frac{v^2}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{16(1+9t^2) \text{ m}^2/\text{s}^2}{\frac{12}{(1+9t^2)^{1/2}} \text{ m/s}^2} = \frac{4}{3} (1+9t^2)^{3/2} \text{ m}$$

VALORES EN $t=5s$

$$a_T(5s) = \frac{36 \cdot 5}{\sqrt{1+9 \cdot 25}} \text{ m/s}^2 = \frac{180}{\sqrt{226}} \text{ m/s}^2 \approx 12 \text{ m/s}^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} a_N(5s) = \frac{12}{\sqrt{226}} \text{ m/s}^2 \approx 0,80 \text{ m/s}^2 \\ \rho(5s) = \frac{4}{3} \cdot 225^{3/2} \text{ m} = \frac{4}{3} \cdot 3375 \text{ m} = 4500 \text{ m} \end{array} \right.$$

c) Calcule un vector unitario tangente a la trayectoria en cualquier instante. Calcule la expresión de los vectores aceleración tangencial y normal y su valor en el instante $t=5s$. (1 punto).

COMO LA VELOCIDAD ES TANGENTE A LA TRAYECTORIA

$$\vec{u}_T = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{4\vec{i} + 12t\vec{j} \text{ m/s}}{4\sqrt{1+9t^2} \text{ m/s}} = \frac{\vec{i} + 3t\vec{j}}{\sqrt{1+9t^2}}$$

$$\vec{a}_T = a_T \vec{u}_T = \frac{36t}{\sqrt{1+9t^2}} \cdot \frac{\vec{i} + 3t\vec{j}}{\sqrt{1+9t^2}} = \frac{36t}{1+9t^2} (\vec{i} + 3t\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

PARA CALCULAR $\vec{a}_N$ PARTIMOS DE $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

$$\vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T = (12\vec{j} \text{ m/s}^2) - \left(\frac{36t}{1+9t^2} (\vec{i} + 3t\vec{j}) \right) \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_N = -\left(\frac{36t}{1+9t^2} \right) \vec{i} + \left(12 - \frac{108t^2}{1+9t^2} \right) \vec{j} = -\left(\frac{36t}{1+9t^2} \right) \vec{i} + \left(\frac{12 + 108t^2 - 108t^2}{1+9t^2} \right) \vec{j} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_N = -\frac{12}{1+9t^2} (3t\vec{i} - \vec{j}) \text{ m/s}^2$$

VALORES A LOS 5s

$$\vec{a}_T(5s) = \frac{36 \cdot 5}{1+9 \cdot 25} (\vec{i} + 3 \cdot 5 \vec{j}) \text{ m/s}^2 = \frac{180}{226} (\vec{i} + 15\vec{j}) \text{ m/s}^2 = \frac{90}{113} (\vec{i} + 15\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_N(5s) = -\frac{12}{1+9 \cdot 25} (3 \cdot 5 \vec{i} - \vec{j}) \text{ m/s}^2 = -\frac{12}{226} (15\vec{i} - \vec{j}) \text{ m/s}^2 = -\frac{6}{113} (15\vec{i} - \vec{j}) \text{ m/s}^2$$