TEORIA. Conteste solo uno de los dos bloques.

Bloque A

A.1 Producto escalar de vectores. Condición de perpendicularidad y ángulo entre vectores. **(1 punto)**

A.2 Componentes intrínsecas de la aceleración. Definición y significado físico. **(1 punto)**

Bloque B

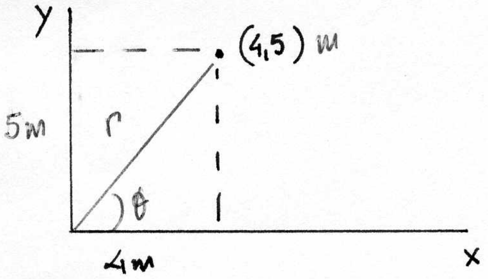
B.1. Producto vectorial de vectores. Condición de paralelismo. **(1 punto)**

B.2 Vectores posición, velocidad y aceleración instantáneos de un cuerpo. Definición y unidades. **(1 punto)**

CUESTIONES OPTATIVAS. Conteste solo uno de los dos bloques.

Bloque C

C.1 Las coordenadas rectangulares de un punto son (4,5)m. Obtenga sus coordenadas polares (r, θ) **(1 punto)**



$$r = \sqrt{x^2+y^2}\ m = \sqrt{4^2+5^2}\ m = \sqrt{16+25}\ m = \sqrt{41}\ m = 6{,}4\ m$$

$$\theta = \text{arc tg}\ \frac{y}{x} = \text{arc tg}\ \frac{5}{4} = \text{arc tg}\ 1{,}25 = 51{,}34^\circ$$

COORD. POLARES = $(6{,}4\ m,\ 51{,}34^\circ)$

C.2 Dados los vectores $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ y $\vec{B} = -6\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ calcule el ángulo que forman **(1 punto)**

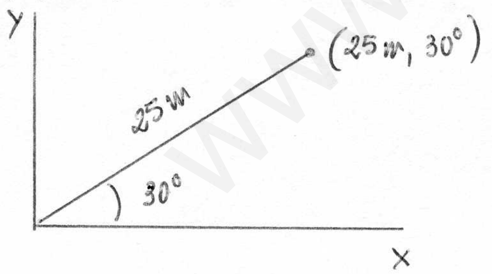
USAREMOS LA DEFINICION DE PRODUCTO ESCALAR $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\widehat{AB}$

$$\cos\widehat{\vec{A}\cdot\vec{B}} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} \qquad |\vec{A}| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}\ ; \quad |\vec{B}| = \sqrt{36+9+16} = \sqrt{61}$$

$$\cos\widehat{\vec{A}\vec{B}} = \frac{-12-9+20}{\sqrt{38}\sqrt{61}} = \frac{-21+20}{6{,}16\cdot 7{,}81} = \frac{-1}{48{,}1} = -0{,}020785 \rightarrow \widehat{\vec{A}\cdot\vec{B}} = 91{,}2^\circ$$

Bloque D

D.1. Las coordenadas polares de un punto son (25m, 30º). Obtenga sus coordenadas rectangulares (x,y). **(1 punto)**



$$x = r\cos\theta = 25\ m\cos 30^\circ = 25\,\frac{\sqrt{3}}{2}\ m = 21{,}65\ m$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 25\ m\ \text{sen}\ 30^\circ = 25\,\frac{1}{2}\ m = 12{,}5\ m$$

COORD. RECTANGULARES = $(21{,}7,\ 12{,}5)\ m$

D.2. Dados los vectores $\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ y $\vec{B} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + 10\vec{k}$ demuestre que son paralelos **(1 punto)**

SI SON PARALELOS $\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{0}$

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ 6 & -4 & 10 \end{vmatrix} = (-20+20)\vec{i} - (30-30)\vec{j} + (-12+12)\vec{k} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k} =$$

$$= \vec{0} \rightarrow \text{SON PARALELOS}$$

PROBLEMAS. Se resolverán sólo dos problemas.

1. Dados los vectores $\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ y $\vec{B} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ calcule

a) Módulo y cosenos directores de ambos vectores. **(1 punto).**

$$|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{9+4+25} = \sqrt{38}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$$

COSENOS DIRECTORES DE $\vec{A}$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{38}} = \frac{3\sqrt{38}}{38} = 0{,}487 \; ; \; \cos\beta = \frac{-2\sqrt{38}}{38} = -0{,}324$$

$$\cos\gamma = \frac{5\sqrt{38}}{38} = 0{,}811$$

COSENOS DIRECTORES DE $\vec{B}$

$$\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{29}}{29} = -0{,}371$$

$$\cos\beta = \frac{3\sqrt{29}}{29} = 0{,}557$$

$$\cos\gamma = \frac{4\sqrt{29}}{29} = 0{,}743$$

b) $\vec{A}+\vec{B}$; $\vec{B}-\vec{A}$; $\vec{A}\cdot\vec{B}$ **(1 punto).**

$$\vec{A}+\vec{B} = (3-2)\vec{i} + (-2+3)\vec{j} + (5+4)\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + 9\vec{k}$$

$$\vec{B}-\vec{A} = (-2-3)\vec{i} + (3+2)\vec{j} + (4-5)\vec{k} = -5\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 3\cdot(-2) + (-2)\cdot 3 + 5\cdot 4 = -6 - 6 + 20 = -12 + 20 = 8$$

c) Producto vectorial de ambos $\vec{A} \wedge \vec{B}$ y módulo de dicho producto $|\vec{A} \wedge \vec{B}|$ **(1 punto).**

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-8-15)\vec{i} - (12+10)\vec{j} + (9-4)\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -23\vec{i} - 22\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = \sqrt{(-23)^2 + (-22)^2 + 5^2} = \sqrt{529 + 484 + 25} = \sqrt{1038} = 32{,}22$$

2. El movimiento de una partícula viene dado por el vector posición $\vec{r}(t) = (4t^2 + t)\vec{i} + (2t^3)\vec{j} + 4\vec{k}$ m encuentre:

a) Vector velocidad en función de t, su módulo y el valor de ambos a los 4 s. **(1 punto).**

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (8t+1)\vec{i} + 6t^2\vec{j} \; m/s \qquad \vec{v}(4s) = 33\vec{i} + 96\vec{j} \; m/s$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(8t+1)^2 + (6t^2)^2} = \sqrt{64t^2 + 16t + 1 + 36t^4} \; m/s$$

$$|\vec{v}|(4s) = \sqrt{64\cdot 16 + 16\cdot 4 + 1 + 36\cdot 4^4} \; m/s = 101{,}5 \; m/s$$

PUEDE COMPROBARSE QUE COINCIDE CON $|\vec{v}(4s)|$

b) Vector aceleración en función de t, su módulo y el valor de ambos a los 4 s. **(1 punto).**

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 8\vec{i} + 12t\,\vec{j}\ m/s^2 \qquad \vec{a}(4s) = 8\vec{i} + 48\vec{j}\ m/s^2$$

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{64 + 144t^2}\ m/s^2 \qquad |\vec{a}(4s)| = \sqrt{64 + 2304}\ m/s^2 = 48{,}7\ m/s^2$$

c) Módulos de la aceleración tangencial y normal a los 4 s. **(1 punto).**

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{144t^3 + 128t + 16}{2\sqrt{36t^4 + 64t^2 + 16t + 1}} = \frac{72t^3 + 64t + 8}{\sqrt{36t^4 + 64t^2}}\ ;\ a_t(4s) = 48{,}1\ m/s^2$$

$$a^2 = a_t^2 + a_N^2 \longrightarrow a_N^2 = a^2 - a_t^2 \longrightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{2368 - 2313{,}6}\ m/s^2 = 7{,}37\ m/s^2$$

3. El movimiento de una partícula viene dado por el vector posición $\vec{r}(t) = (4t^2 + t)\vec{i} + (2t^3)\vec{j} + 4\vec{k}$ m encuentre:

a) Velocidad media en los 5 primeros segundos. **(1 punto).**

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(5) - \vec{r}(0)}{\Delta t} = \frac{(105\vec{i} + 250\vec{j} + 4\vec{k}) - 4\vec{k}\ m}{5s} = \frac{105\vec{i} + 250\vec{j}}{5}\ m/s$$

$$\vec{v}_m = 21\vec{i} + 50\vec{j}\ m/s$$

b) Producto escalar de $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ **(1 punto).**

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (8t+1)\vec{i} + 6t^2\vec{j}$$

$$\vec{r}\cdot\vec{v} = \left[(4t^2+t)\vec{i} + (2t^3)\vec{j} + 4\vec{k}\right]\cdot\left[(8t+1)\vec{i} + 6t^2\vec{j}\right] = (4t^2+t)(8t+1) + 6t^2(2t^3)$$
$$= 32t^3 + 8t^2 + 4t^2 + t + 12t^5 = 12t^5 + 32t^3 + 12t^2 + t$$

c) Aceleración media en los 5 primeros segundos. **(1 punto).**

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(5) - \vec{v}(0)}{\Delta t} = \frac{(41\vec{i} + 150\vec{j}) - \vec{i}\ m/s}{5s} = \frac{40\vec{i} + 150\vec{j}}{5}\ m/s^2$$

$$\vec{a}_m = 8\vec{i} + 30\vec{j}\ m/s^2$$