

Dada la función $f(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$. Calcular los puntos críticos de la función $f(x)$ en el intervalo

$(-\pi, \pi)$. Calcular los extremos relativos y/o absolutos de la función en el cerrado $[-\pi, \pi]$

Esboza la gráfica.

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

La función no existe si:

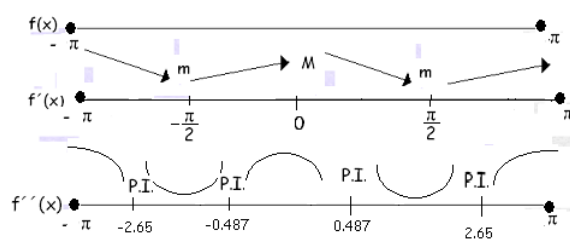
$$1 + \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = -1 \Rightarrow \text{no existe solución}$$

2º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{-(2 \sin x \cdot \cos x)}{(1 + \sin^2 x)^2} = \frac{-\sin 2x}{(1 + \sin^2 x)^2}$$

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



$$y' = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \arccos x = 0 \Rightarrow x = 90^\circ + 180n = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \sin x = 0 \Rightarrow x = \arcsen x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ + 180n = 0 + k\pi \end{cases} \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi] \\ k=-1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi] \\ k=-1 \Rightarrow x = -\pi \in [-\pi, \pi] \\ k=0 \Rightarrow x = 0 \in [-\pi, \pi] \\ k=1 \Rightarrow x = \pi \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

$$\forall x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right), y'(-135^\circ) < 0 \text{ decreciente} \rightarrow \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) y'(-45^\circ) > 0 \text{ creciente}$$

$$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) y'(45^\circ) < 0 \text{ decreciente} \rightarrow \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) y'(135^\circ) > 0 \text{ creciente}$$

En $(0,1)$ existe un Máximo relativo. En $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right)$ existe un mínimo relativo.

En $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right)$ existe un mínimo relativo

3º Curvatura.

$$y'' = \frac{(1 + \sin^2 x)^2 \cdot (-2(\cos^2 x - \sin^2 x)) + (2 \sin x \cdot \cos x) \cdot 2(1 + \sin^2 x)(2 \sin x \cdot \cos x)}{(1 + \sin^2 x)^4} = \frac{(1 + \sin^2 x)[(-2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x)(1 + \sin^2 x) + 8 \sin^2 x \cos^2 x]}{(1 + \sin^2 x)^4} = \frac{(2 - 4 \cos^2 x)(2 - \cos^2 x) + 8 \cos^2 x - 8 \cos^4 x}{(1 + \sin^2 x)^3} = \frac{4 - 8 \cos^2 x - 2 \cos^2 x + 4 \cos^4 x + 8 \cos^2 x - 8 \cos^4 x}{(1 + \sin^2 x)^3} = \frac{-4 \cos^4 x - 2 \cos^2 x + 4}{(1 + \sin^2 x)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow -2\cos^4 x - \cos^2 x + 2 = 0 \Rightarrow \left\{ \cos^2 x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{-4} = \begin{cases} \cos^2 x = \frac{1 + \sqrt{17}}{-4} < -1 \\ \cos^2 x = \frac{1 - \sqrt{17}}{-4} = 0.7807764 \end{cases} \right.$$

$$\cos x = \pm \sqrt{0.7807764} = \begin{cases} x = \arccos 0.88361 = \begin{cases} x = 27^\circ 55' + 360n = 0.487 + 2k\pi \text{ radianes} \\ x = -27^\circ 55' + 360n = -0.487 + 2k\pi \text{ radianes} \end{cases} \\ x = \arccos(-0.88361) = \begin{cases} x = 152^\circ 4' + 360n = 2.654 + 2k\pi \text{ radianes} \\ x = -152^\circ 4' + 360n = -2.654 + 2k\pi \text{ radianes} \end{cases} \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\pi, -2.654), \quad y''(-160^\circ) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in (-2.654, -0.487), \quad y''(-90^\circ) > 0 \quad \text{cóncava}$$

$$\forall x \in (-0.487, 0.487), \quad y''(0^\circ) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in (0.487, 2.654), \quad y''(90^\circ) > 0 \quad \text{cóncava}$$

$$\forall x \in (2.654, +\pi), \quad y''(160^\circ) < 0 \quad \text{convexa}$$

En $(-2.654, 0.82)$ hay un punto de Inflexión.

En $(0.487, 0.82)$ hay un punto de Inflexión.

En $(-0.487, 0.82)$ hay un punto de Inflexión.

En $(2.654, 0.82)$ hay un punto de Inflexión.

4.- Máximos y mínimos globales

$$\begin{cases} \text{si } x = -\pi \Rightarrow f(-\pi) = 1 \\ \text{si } x = \frac{-\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ \text{si } x = 0 \Rightarrow f(0) = 1 \\ \text{si } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ \text{si } x = \pi \Rightarrow f(\pi) = 1 \end{cases}$$

Máximo absoluto (global) $f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 1$ Mínimo absoluto (global) $f\left(\frac{-\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

5.- Gráfica

