

Dada la función $f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$. Calcular los extremos relativos y/o absolutos de la función en el cerrado $[-\pi, \pi]$. Calcular su curvatura y puntos de Inflexión. Esboza la gráfica.

1° Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

La función no existe si:

$$2 - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 2 \Rightarrow \text{no existe}$$

2° Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(2 - \cos x)(\cos x) - (\sin x)(0 + \sin x)}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2 \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2 \cos x - (\cos^2 x + \sin^2 x)}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2 \cos x - 1}{(2 - \cos x)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \arccos \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ + 360n = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = 300^\circ + 360n = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ k=-1 \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{3} \\ k=0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3} \\ k=-1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\forall x \in \left(-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right), y'(-330^\circ) > 0 \quad \text{creciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in \left(-\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right), y'(-180^\circ) < 0 \quad \text{decreciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), y'(0) > 0 \quad \text{creciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), y'(180^\circ) < 0 \quad \text{decreciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right), y'(330^\circ) > 0 \quad \text{creciente} \rightarrow$$

$$\text{En } \left(-\frac{5\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{existe un Máximo relativo.} \quad \text{En } \left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{existe un mínimo relativo.}$$

$$\text{En } \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{existe un Máximo relativo.} \quad \text{En } \left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{existe un mínimo relativo}$$

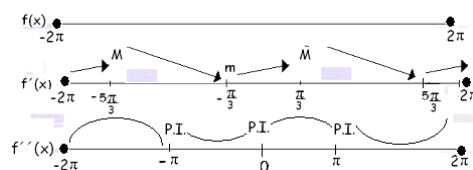
3.- Máximos y mínimos globales:

$$\text{Máximos y mínimos globales} \begin{cases} \text{si } x = -2\pi \Rightarrow f(-2\pi) = 0 \\ \text{si } x = -\frac{5\pi}{3} \Rightarrow f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{si } x = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{si } x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{si } x = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{si } x = 2\pi \Rightarrow f(2\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Máximo absoluto (global)} \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Mínimo absoluto (global)} \quad f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



4º Curvatura.

$$y'' = \frac{(2 - \cos x)^2 \cdot (-2 \operatorname{sen} x) - (2 \cos x - 1) \cdot 2(2 - \cos x)(\operatorname{sen} x)}{(2 - \cos x)^4} \stackrel{\text{simplificamos}}{=} \\ \frac{(2 - \cos x) \cdot 2 \cdot (\operatorname{sen} x) \cdot [(2 - \cos x)(-1) - (2 \cos x - 1)]}{(2 - \cos x)^4} = \frac{(2 \operatorname{sen} x)(-2 + \cos x - 2 \cos x + 1)}{(2 - \cos x)^3} \\ = \frac{(2 \operatorname{sen} x)(-1 - \cos x)}{(2 - \cos x)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow (2 \operatorname{sen} x)(-1 - \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = \operatorname{arcsen} 0 = \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x = 180n \Rightarrow x = k\pi \\ k = 1 \Rightarrow x = \pi \\ k = -1 \Rightarrow x = -\pi \end{cases} \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = \operatorname{arccos}(-1) = \begin{cases} x = 180 + 360n \Rightarrow x = \pi + 2k\pi \\ k = 0 \Rightarrow x = \pi \\ k = -1 \Rightarrow x = -\pi \end{cases} \end{cases}$$

$$\forall x \in (-2\pi, -\pi), \quad y''(-270^\circ) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in (-\pi, 0), \quad y''(-90^\circ) > 0 \quad \text{cóncava}$$

$$\forall x \in (0, \pi), \quad y''(90^\circ) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in (\pi, 2\pi), \quad y''(270^\circ) > 0 \quad \text{cóncava}$$

En $(-\pi, 0)$ hay un punto de Inflexión.

En $(0, \pi)$ hay un punto de Inflexión.

En $(\pi, 2\pi)$ hay un punto de Inflexión.

5.- Gráfica

