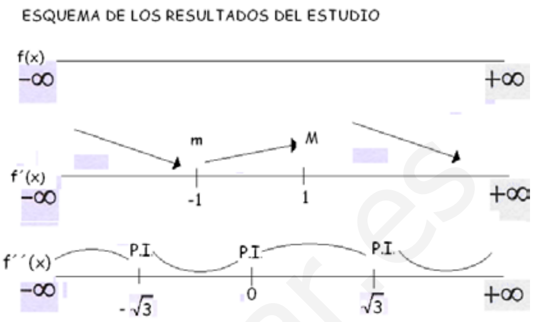
Hallar los máximos y los mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x)=\dfrac{3x^2+x+3}{x^2+1}$

1º Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re$

La función no existe si $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}\notin R$

2ªMonotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía



$$y´=\frac{(x^2+1)(6x+1)-(3x^2+x+3)2x}{(x^2+1)^2}=$$

$$\frac{6x^3+6x+x^2+1-6x^3-2x^2-6x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$y´=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow -x^2+1=0 \Rightarrow x^2=1\begin{cases} x=1 \\ x=-1\end{cases}$$

$\forall x\in(-\infty,-1) \Rightarrow \quad y´(-2)<0$ decreciente

$\forall x\in(-1,1) \Rightarrow \quad y´(0)>0$ creciente

$\forall x\in(1,+\infty) \Rightarrow \quad y´(4)<0$ decreciente

En x=-1 hay un mínimo relativo (-1, 5/2)

En x=1 hay un Máximo ni mínimo relativo (1,7/2)

3º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y´´=\frac{(x^2+1)^2(-2x)-(-x^2+1).2.(x^2+1).2x}{(x^2+1)^4}$$

$$\underset{factorizar}{=}\frac{(x^2+1)\left[(x^2+1)(-2x)-4x(-x^2+1)\right]}{(x^2+1)^4}$$

$$\underset{simplificamos}{=}\frac{-2x^3-2x+4x^3-4x}{(x^2+1)^3}=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$y´´=0 \quad \Rightarrow \quad 2x(x^2-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=+\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3}\end{cases}$$

$\forall x\in(-\infty,-\sqrt{3}) \Rightarrow \quad y´´(-8)<0$ convexa

$\forall x\in(-\sqrt{3},0) \Rightarrow \quad y´´(-1)>0$ cóncava

$\forall x\in(0,\sqrt{3}) \Rightarrow \quad y´´(1)<0$ convexa

$\forall x\in(\sqrt{3},+\infty) \Rightarrow \quad y´´(8)>0$ cóncava

En (0, 3) hay un punto de Inflexión.

En $\left(-\sqrt{3},\dfrac{12-\sqrt{3}}{4}\right)$ hay un punto de Inflexión

En $\left(\sqrt{3},\dfrac{12+\sqrt{3}}{4}\right)$ hay un punto de Inflexión

7º Gráfica: