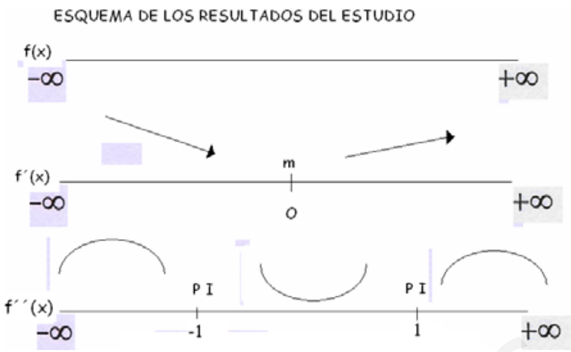
Estudio completo de $y = \ln(x^2+1)$



1º Dominio de f(x): $D[f(x)] = \Re$

Pues $x^2+1>0 \quad \forall x \in \Re$

2º Simetrías:

$f(-x) = \ln[(-x)^2+1] = \ln(x^2+1) = f(x)$

Función par (simetría con respecto a OY)

3º Asíntotas:

***A.V.** : No tiene, la función existe $\forall x \in \Re$

***AH.** :

A) Se calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x^2+1\right) = \ln(+\infty) = +\infty$

No hay Asíntota horizontal en el +∞.

B) Se calcula el $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Por ser par $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Luego **no hay asíntota horizontal en el -∞.**

***A.O.** : y= m x+n

A) Cuando $x \to -\infty$

1º Se calcula **"m"**:

$$- \qquad m = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(x^2+1)}{x}\right) \underset{-\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L´Hopital}{=}} \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x^2+1}\right) = \frac{2}{+\infty} = +0$$

Por lo tanto **no existe una asíntota oblicua en el -∞**: curvatura y tendencia $+\infty$ ∞

B) Cuando $x \to +\infty$

1º Se calcula **"m"**:

$$- \qquad m = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x^2+1)}{x}\right) \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L´Hopital}{=}} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^2+1}\right) = \frac{2}{+\infty} = +0$$

Por lo tanto **no existe una asíntota oblicua en el +∞**: curvatura y tendencia $+\infty$ $+\infty$

4º Corte con OX: (¿?, 0)

$0 = \ln(x^2+1) \Rightarrow x^2+1 = e^0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ **(0,0) punto de corte con OX**

Corte con OY: (0, ¿?)

$f(0) = \ln 1 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow$ $(0,0)$ **punto de corte con OY**

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$y´ = \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\qquad y´=0 \Rightarrow 0 = 2x \Rightarrow x = 0$

$\forall x \in (-\infty, 0)$ $\quad y´(-4) < 0$ $\quad$ decreciente

$\forall x \in (0,+\infty) \Rightarrow \quad y'(1) > 0$ creciente

$x = 0 \quad ; f(0) = 0 \quad \Rightarrow (0\,,0)$

En $(0\,,0)$ **existe un mínimo relativo.**

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{(x^2+1)2 - 2x.2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$-2x^2+2=0 \Rightarrow \quad x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

$\forall x \in (-\infty\,,-1) \quad y''(-4) < 0$ convexa

$\forall x \in (\,-1{,}1) \quad y''(0) > 0$ cóncava

$\forall x \in (1,+\infty) \Rightarrow \quad y''(4) < 0$ convexa

Puntos de inflexión:

$x=-1;\ f(-1) = \ln 2 \quad \Rightarrow (-1\,,\ln 2)$

$x=1;\ f(1) = \ln 2 \quad \Rightarrow (1\,,\ln 2)$

7º Gráfica: