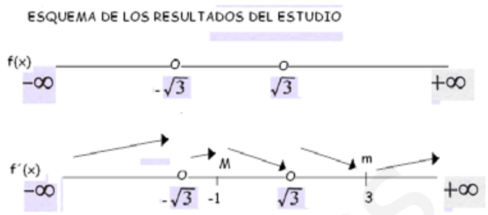
Esboza la gráfica de $y=\dfrac{e^x}{x^2-3}$ **calculando el dominio, signo, asíntotas, monotonía, máximos y mínimos relativos**

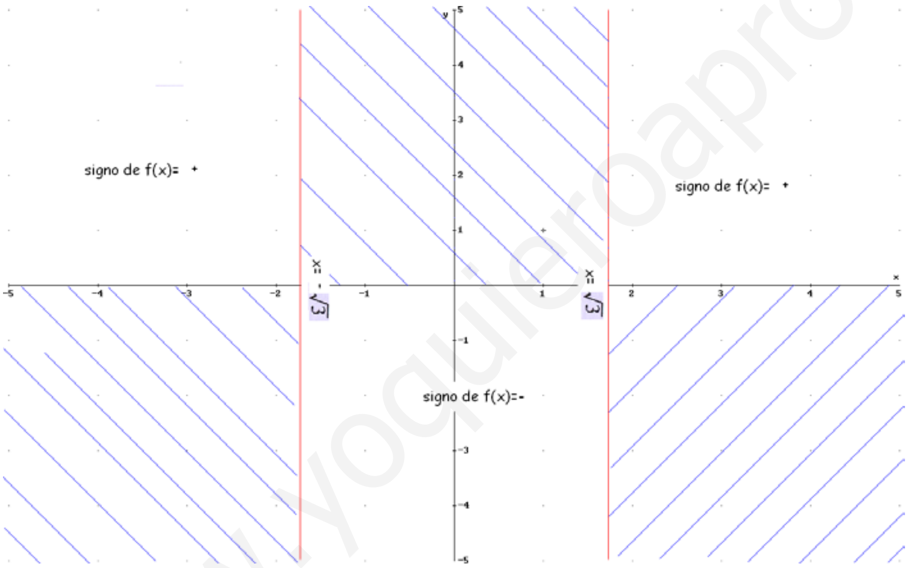
1° Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re-\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$

La función no existe si $x^2-3=0 \quad \Rightarrow \quad x\begin{cases} x=+\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases}$



2° Signo de f(x)

$$\begin{cases} e^x>0 \quad \forall x\in\Re \\ x^2-3=0 \quad \Rightarrow \quad x\begin{cases} x=+\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall\left(-\infty,-\sqrt{3}\right) & y>0\Rightarrow + \\ \forall\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right) & y<0\Rightarrow - \\ \forall\left(\sqrt{3},+\infty\right) & y>0\Rightarrow + \end{cases} \end{cases}$$



2° Asíntotas:

***A.V.** : $D[f(x)]=\Re-\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$

A) Luego tiene como posible asíntota vertical: ¿ $x=-\sqrt{3}$?

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}}\frac{e^x}{x^2-3}=\frac{e^{-\sqrt{3}}}{0} \quad \textit{Cálculo de límites laterales} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^-}\dfrac{e^x}{x^2-3}=\dfrac{e^{-\sqrt{3}}}{+0}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^+}\dfrac{e^x}{x^2-3}=\dfrac{e^{-\sqrt{3}}}{-0}=-\infty \end{cases}$$

Asíntota vertical: $x=-\sqrt{3}$

B) Luego tiene como posible asíntota vertical: ¿ $x=\sqrt{3}$?

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{e^x}{x^2-3} = \frac{e^{\sqrt{3}}}{0} \underset{\textit{Cálculo de límites laterales}}{\Rightarrow} \begin{cases} \lim\limits_{x\to\sqrt{3}^-} \dfrac{e^x}{x^2-3} = \dfrac{e^{\sqrt{3}}}{-0} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+} \dfrac{e^x}{x^2-3} = \dfrac{e^{\sqrt{3}}}{+0} = +\infty \end{cases}$$ Asíntota vertical: $x=\sqrt{3}$

***AH.** :

A) Se calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-3} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L´Hopital}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L´Hopital}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$ Luego **no hay asíntota horizontal.**

B) Se calcula el $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2-3} = \frac{e^{-\infty}}{+\infty} = \frac{+0}{+\infty} = +0$$

Luego hay asíntota horizontal "y=+0" en el -∞; la curva se encuentra por encima de la asíntota.

***A.O.** : y= m x+n

Si existe sólo podría haberla en el +∞

A) Cuando $x \to +\infty$

1º Se calcula **"m"**:

- $$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{x^2-3}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3-3x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L´Hopital}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^2-3} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L´Hopital}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L´Hopital}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$$

No existe una asíntota oblicua, la curvatura será: $+\infty$ $+\infty$

3º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$$y´= \frac{(x^2-3)e^x - e^x.2x}{(x^2-3)^2} \underset{factorizamos}{=} \frac{e^x(x^2-2x-3)}{(x^2-3)^2}$$

$$y´=0 \quad x^2-2x-3=0 \Rightarrow \quad x = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ \dfrac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

$\forall x \in (-\infty,-\sqrt{3}) \Rightarrow \quad y´(-4) > 0$ creciente $\nearrow$

$\forall x \in (-\sqrt{3},-1) \Rightarrow \quad y´(-1{,}5) > 0$ creciente $\nearrow$

$\forall x \in (-1,\sqrt{3}) \Rightarrow \quad y´(0) > 0$ decreciente $\searrow$

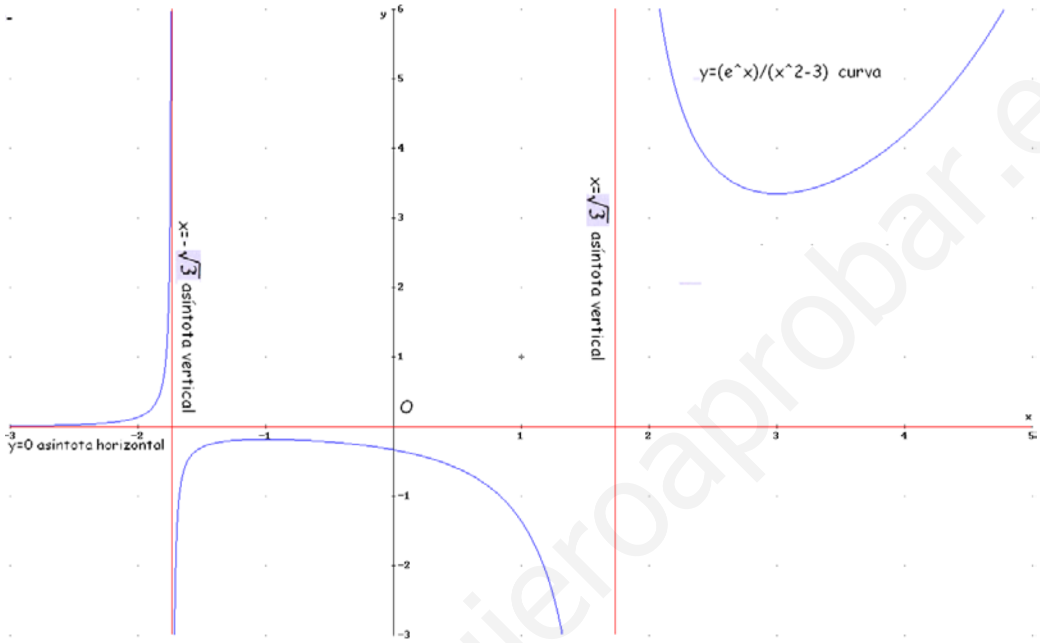
$\forall x \in (\sqrt{3},3) \Rightarrow \quad y´(2) < 0$ decreciente $\searrow$

$\forall x \in (3,+\infty) \Rightarrow \quad y´(4) < 0$ creciente $\nearrow$

$x=-1 \quad f(-1) = \dfrac{e^{-1}}{1-3} = \dfrac{-1}{2e}$ **En (-1, $\frac{-1}{2e}$) existe un máximo relativo.**

$x=3 \quad f(3) = \dfrac{e^3}{9-3} = \dfrac{e^3}{6}$ **En (3, $\frac{e^3}{6}$) existe un mínimo relativo**

4º Gráfica:



y=(e^x)/(x^2-3) curva
x=-√3 asíntota vertical
x=√3 asíntota vertical
y=0 asintota horizontal
O