

Estudio completo de $y = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$.

1º Dominio de $f(x)$:

$$D[f(x)] = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$$

La función no existe si

$$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \begin{cases} x = -4 \\ x = 4 \end{cases}$$

2º Cortes con los ejes:

Corte con OX: $(\cdot, 0)$

$$0 = 2x^3, x=0; (0, 0)$$

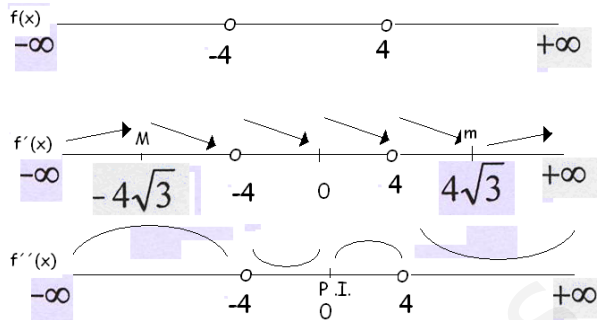
Corte con OY: $(0, ?)$

$$f(0) = 0; (0, 0)$$

3º Simetrías:

$$f(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2 - 16} = \frac{-2x^3}{x^2 - 16} = -f(x) \text{ es una función impar. Simétrica respecto del } (0, 0).$$

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



4º Asíntotas:

*A.V.: $D[f(x)] = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$

Luego tiene como posible asíntota vertical: $x = -4$? O $x = 4$?

$$A) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^3}{x^2 - 16} = \frac{-128}{0} \text{ hay que hacer límites laterales} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{2x^3}{x^2 - 16} = \frac{-128}{+0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{2x^3}{x^2 - 16} = \frac{-128}{-0} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^3}{x^2 - 16} \text{ No existe}$$

$x = -4$ ASÍNTOTA VERTICAL

$$B) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^3}{x^2 - 16} = \frac{128}{0} \text{ hay que hacer límites laterales} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x^3}{x^2 - 16} = \frac{128}{-0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x^3}{x^2 - 16} = \frac{128}{+0} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^3}{x^2 - 16} \text{ No existe}$$

$x = 4$ ASÍNTOTA VERTICAL

*A.H.:

Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 - 16} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \text{ Luego no hay asíntota horizontal.}$$

*A.O.: $y = mx + n$

1º Se calcula "m":

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2 - 16}}{\frac{x^2 - 16}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{x^3 - 16x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{x^3 - 16x} \right) = 2$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua $y = 2x + n \rightarrow n = y - 2x$

2° Se calcula el "n":

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 - 16} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 + 32x}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{32x}{x^2 - 16} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{32x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{32}{x} = \frac{32}{+\infty} = 0$$

Luego "y= 2x" será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$	$y = 2x$	$y_1 - y_2$	situación
$x=100$	$y_1 = \frac{2(100)^3}{(100)^2 - 16} = 200,1602564$	$y_2 = 200$	$200,1602564 - 200 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y_1 = \frac{2(-100)^3}{(100)^2 - 16} = -200,1602564$	$y_2 = -200$	$-200,1602564 + 200 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $-\infty$

5° Monotonía. Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(x^2 - 16)6x^2 - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2} = \frac{6x^4 - 96x^2 - 4x^4}{(x^2 - 16)^2} = \frac{2x^4 - 96x^2}{(x^2 - 16)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x^4 - 96x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2(x^2 - 48) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4\sqrt{3} \\ x = -4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, -4\sqrt{3}) \Rightarrow y'(-15) > 0 \quad \text{creciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (-4\sqrt{3}, -4) \Rightarrow y'(-5) < 0 \quad \text{decreciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (-4, 0) \Rightarrow y'(-1) < 0 \quad \text{decreciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (0, 4) \Rightarrow y'(1) < 0 \quad \text{decreciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (4, 4\sqrt{3}) \Rightarrow y'(5) < 0 \quad \text{decreciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (4\sqrt{3}, +\infty) \Rightarrow y'(15) > 0 \quad \text{creciente} \rightarrow$$

En $(-4\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ existe un máximo relativo.

En $(4\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ existe un mínimo relativo.

6° Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{(x^2 - 16)^2 (8x^3 - 192x) - (2x^4 - 96x^2) \cdot 2 \cdot 2x(x^2 - 16)}{(x^2 - 16)^4} = \text{factorizar}$$

$$\frac{(x^2 - 16)^2 (8x^5 - 128x^3 - 192x^3 + 3072x - 8x^5 + 384x^3)}{(x^2 - 16)^4} = \frac{64x^3 + 3072x}{(x^2 - 16)^3} = \frac{x(64x^2 + 3072)}{(x^2 - 16)^3}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x(64x^2 + 3072) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 64x^2 + 3072 = 0 \text{ no hay solución} \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, -4) \Rightarrow y''(-8) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in (-4, 0) \Rightarrow y''(-1) > 0 \quad \text{cóncava}$$

$$\forall x \in (0, 4) \Rightarrow y''(1) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in (4, +\infty) \Rightarrow y''(8) > 0 \quad \text{cóncava}$$

En (0,0) hay un punto de inflexión.

7º Gráfica:

