Estudio completo de $y=\sqrt{x^2-4}$.

1° Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re$

La función existe si $x^2-4>0$

$$x^2-4=0\begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

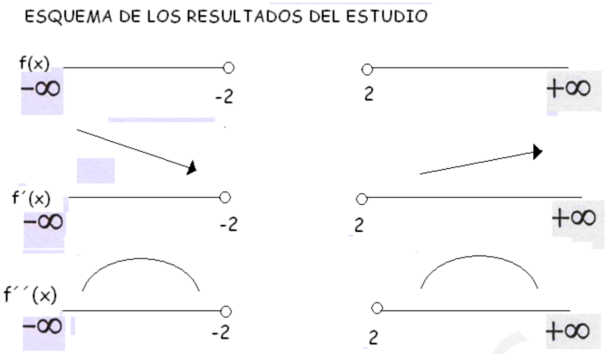
$\forall x\in(-\infty,-2)\Rightarrow \quad x^2-4>0$

$\forall x\in(-2,2)\Rightarrow \quad x^2-4<0$

$\forall x\in(2,+\infty)\Rightarrow \quad x^2-4>0$

Luego existe $\forall x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

$D[f(x)]=\Re$ -(2,2)



2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: (¿,0)

0= $\sqrt{x^2-4}$, $x^2-4=0\begin{cases} x=2\Rightarrow(2,0) \\ x=-2\Rightarrow(-2,0) \end{cases}$

Corte con OY: (0,?)

$f(0)=\sqrt{-4}$ no existe, no corta el OY.

3° Simetrías:

$f(-x)=\sqrt{(-x)^2-4}=\sqrt{x^2-4}=f(x)$

Es una función par.

Simétrica respecto del eje OY.

4° Asíntotas:

***A.V.** : Existe $\forall x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$, dónde toma valores reales.

Luego no tiene asíntota vertical

AH. : Por no ser una función del tipo** $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}\begin{cases} P(x) & polinomio \\ Q(x) & polinomio \end{cases}$ ***hay que calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ***y*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

A) Se calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4} \quad = \quad \sqrt[3]{+\infty}=+\infty$ Luego **no hay asíntota horizontal.**

B) Se calcula el $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-4} \quad = \quad \sqrt[3]{+\infty}=+\infty$ Luego **no hay asíntota horizontal.**

***A.O**

A) **cuando** x $\to+\infty$.

1° Se calcula **"m"** :

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua y = x+n → n = y -x

2° Se calcula el **"n"**:

$$n = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-4} - x \right) \underset{\infty - \infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-4} - x \right)\left(\sqrt{x^2-4} + x \right)}{\sqrt{x^2-4} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-9} + x} = \frac{-4}{+\infty} = -0$$

Luego **"y=x"** será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y = \sqrt{x^2-4}$	Y=x	Y_1- Y_2	situación
x=100	$y_1 = \sqrt{100^2-4} =$ 99,979998	$y_2 = 100$	$99{,}979998 - 100 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$

(como se observa en la gráfica adjunta)

B) **cuando** x →-∞.

1° Se calcula **"m"** :

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} \underset{x \ por \ -x}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{-x} \underset{\frac{\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{-x} = -1$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua y =- x+n → n = y +x

2° Se calcula el **"n"**:

$$n = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2-4} + x \right) \underset{x \ por \ -x}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-4} - x \right) \underset{\infty - \infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-4} - x \right)\left(\sqrt{x^2-4} + x \right)}{\sqrt{x^2-4} + x} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-4} + x} = \frac{-4}{+\infty} = -0$$

Luego **"y=-x"** será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y = \sqrt{x^2-4}$	Y=-x	Y_1- Y_2	situación
x=-100	$y_1 = \sqrt{(-100)^2-9}$ 99,979998	$y_2 = +100$	$99{,}979998 - 100 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$

5° Monotonía. Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía $y' = \frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\cdot\sqrt{x^2-4}}$

$y'=0 \quad \Rightarrow \quad si \quad x=0 \notin$ Dominio de f(x)

Pero y' deja de existir si $x^2-4=0 \Rightarrow \quad x=2 \Rightarrow x=-2$ y no puede haber un cambio de monotonía, porque no existe a la derecha de x=-2, ni a la izquierda de x= 2.

.

$\forall x \in (-\infty,-2) \Rightarrow \quad y'(-15)<0$ decreciente

$\forall x \in (2,+\infty) \Rightarrow \quad y'(15)>0$ creciente

No hay ni máximos ni mínimos. Relativos.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{\sqrt{x^2-4} - x\cdot\frac{.2x}{2\cdot\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{(x^2-4)^2}} = \frac{\frac{x^2-4-x^2}{\cdot\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{-4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$$

$\forall x \in \Re \Rightarrow y'' \neq 0 \Rightarrow \quad -4 \neq 0$ luego nunca se anula la derivada y´´.

Pero y'' deja de existir si $(x^2-4)\sqrt{(x^2-4)} = 0 \Rightarrow x^2-4=0 \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$ pero en estos puntos no puede haber un cambio de curvatura porque no existe a la derecha de X=-2, ni a la izquierda de x= 2.

$\forall x \in (-\infty,-2) \Rightarrow \quad y''(-8)<0$ convexa

$\forall x \in (2,+\infty) \Rightarrow \quad y''(8)<0$ convexa

Puntos de inflexión no tiene.

7º Gráfica: