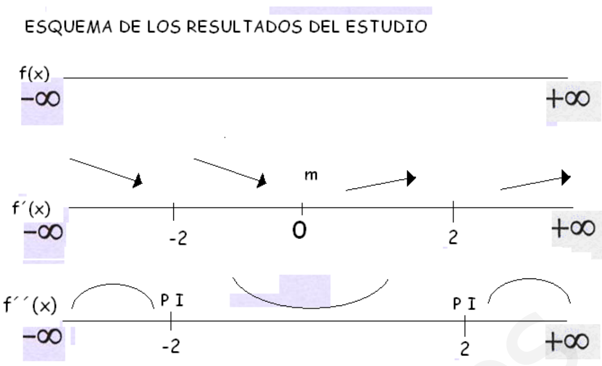
Estudio completo de $y=\sqrt[3]{x^2-4}$.

1° Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re$



2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: (¿,0)

0= $\sqrt[3]{x^2-4}$, $x^2-4=0\begin{cases} x=2\Rightarrow(2{,}0) \\ x=-2\Rightarrow(-2{,}0)\end{cases}$

Corte con OY: (0,?)

$f(0)=\sqrt[3]{-4}$; **(0,** $\sqrt[3]{-4}$ **)**

3° Simetrías:

$f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^2-4}=\sqrt[3]{x^2-4}=f(x)$

Es una función par.

Simétrica respecto del eje OY.

4° Asíntotas:

***A.V.** : $D[f(x)]=\Re$

Luego no tiene asíntota vertical

AH.** : **Por no ser una función del tipo** $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}\begin{cases} P(x) & polinomio \\ Q(x) & polinomio\end{cases}$ ***hay que calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ***y*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

A) Se calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2-4} = \sqrt[3]{+\infty}=+\infty$ Luego **no hay asíntota horizontal.**

B) Se calcula el $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2-4} = \sqrt[3]{+\infty}=+\infty$ Luego **no hay asíntota horizontal.**

***A.O.**: y= m x+n

1° Se calcula **"m"**:

- **A)** $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-4}}{x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}}=\dfrac{1}{+\infty}=+0$

+ ∞

<u>No hay asíntota oblicua pero la curvatura será</u>

- **B)** $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-4}}{x} \underset{x\ por\ -x}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{-x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}}=\dfrac{-1}{+\infty}=-0$

$+\infty$

<u>No hay asíntota oblicua pero la curvatura será</u>

5º Monotonía. Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía $y' = \dfrac{2x}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}}$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad si \quad x = 0$

Pero y' deja de existir si $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \quad x = 2 \Rightarrow x = -2$ y puede haber un cambio de monotonía.

$\forall x \in \left(-\infty,-2\right) \Rightarrow \quad y'(-15) < 0$ decreciente

$\forall x \in \left(-2,0\right) \Rightarrow \quad y'(-1) < 0$ decreciente

$\forall x \in \left(0,2\right) \Rightarrow \quad y'(1) > 0$ creciente

$\forall x \in \left(2,+\infty\right) \Rightarrow \quad y'(15) > 0$ creciente

En $(0, \sqrt[3]{-4}\,)$ existe un mínimo relativo (En este caso es un punto anguloso, y´(0) no existe).

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2} - x\cdot\dfrac{2\left(x^2-4\right)2x}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^4}}}{\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^4}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\dfrac{3.\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^6} - 4x^2\left(x^2-4\right)}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^4}}}{\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^4}}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3.\left(x^2-4\right)^2 - 4x^2\left(x^2-4\right)}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^8}} = \frac{2}{9}.\frac{\left(x^2-4\right)[3x^2-12-4x^2]}{\left(x^2-4\right)^2\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}} =$$

$$\frac{2}{9}.\frac{[-12-x^2]}{\left(x^2-4\right)\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}}$$

$\forall x \in \Re \Rightarrow y'' \neq 0 \quad -x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = -12 \Rightarrow x \notin \Re$ luego nunca se anula la derivada y´´.

Pero y'' deja de existir si $\left(x^2-4\right)\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$ y podría haber un cambio de curvatura.

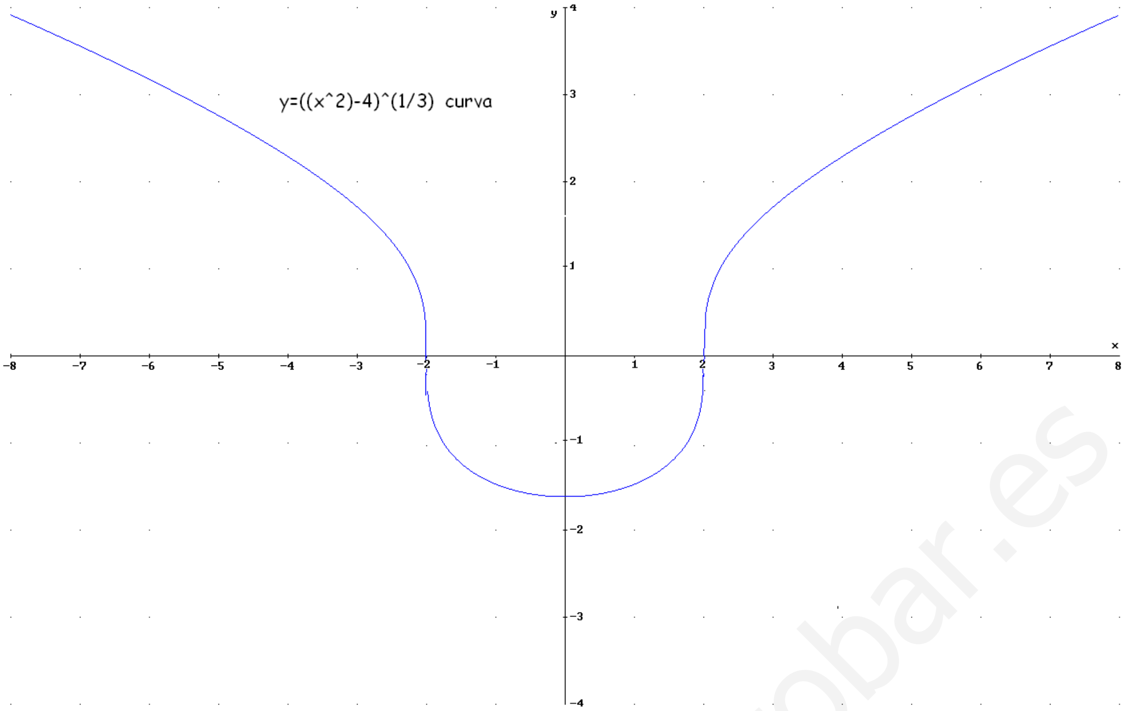
$\forall x \in \left(-\infty,-2\right) \Rightarrow \quad y''(-8) < 0$ convexa

$\forall x \in \left(-2,2\right) \Rightarrow \quad y''(0) < 0$ cóncava

$\forall x \in \left(2,+\infty\right) \Rightarrow \quad y''(8) < 0$ convexa

Puntos de inflexión en (-2,0) y en (2,0).

7º Gráfica:


y=((x^2)-4)^(1/3) curva
y
x
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4