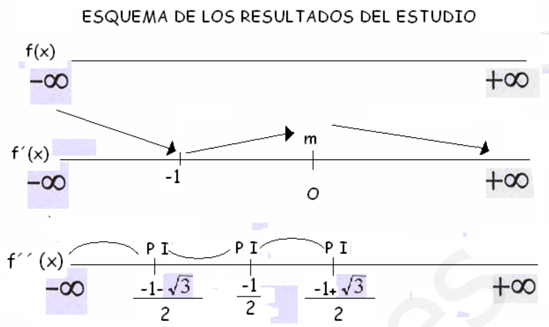
Dada la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$ **.Calcular sus máximos y mínimos relativos de la función f(x).**

Asíntotas y esboza la gráfica. (Ejercicio de selectividad y dan como dato los valores de x dónde la función tiene puntos de inflexión) Curvatura estudiada aunque no se pide.

1º Dominio de f(x): $D[f(x)]=\Re$

La función no existe si:

$$\left(x^2+x+1\right)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+x+1=0 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}\ \text{no existe} \end{cases}$$



2º Asíntotas:

***A.V.** : No tiene, la función existe $\forall x\in\Re$

***AH.** :

A) Se calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L\acute{}Hopital}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2\left(x^2+x+1\right)(2x+1)}=\frac{2}{+\infty}=+0$$

Luego **"y=0" asíntota horizontal en el +∞. La curva está por encima de la asíntota.**

B) Se calcula el $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\substack{cambiamos\\ x\ por\ -x}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+1}{\left(x^2-x+1\right)^2}\underset{\frac{-\infty}{\infty}}{\overset{L\acute{}Hopital}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{2\left(x^2-x+1\right)(2x-1)}=\frac{-2}{+\infty}=-0$$

Luego **"y=0" asíntota horizontal en el -∞. La curva está por debajo de la asíntota.**

3º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´=0 para estudiar el cambio de monotonía

$$y\acute{}=\frac{\left(x^2+x+1\right)^2.(2)-(2x+1).2\left(x^2+x+1\right)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^4}\underset{factorizamos}{=}\frac{\left(x^2+x+1\right)\left[2\left(x^2+x+1\right)-2\left(4x^2+4x+1\right)\right]}{\left(x^2+x+1\right)^4}\underset{simplificamos}{=}$$

$$\frac{2x^2+2x+2-8x^2-8x-2}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\frac{-6x^2-6x}{\left(x^2+x+1\right)^3}$$

$$y\acute{}=0 \quad -6x^2-6x=0\Rightarrow -6x(x+1)=0\begin{cases}x=0\\x=-1\end{cases}$$

$\forall x\in(-\infty,-1)$ $\quad y\acute{}(-4)<0$ decreciente

$\forall x\in(-1,0)$ $\quad y\acute{}(-0.5)>0$ creciente

$\forall x\in(0+\infty)$ $\quad y\acute{}(10)<0$ decreciente

$x=0$; $f(0)=\dfrac{1}{(1)^2}=1$. **En** $(0,1)$ **existe un Máximo relativo relativo.**

$x=-1$; $f(-1)=\dfrac{-1}{(1-1+1)^2}=-1$. **En** $(-1,-1)$ **existe un mínimo relativo relativo.**

4º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{\left(x^2+x+1\right)^3.(-12x-6)-\left(-6x^2-6x\right)3\left(x^2+x+1\right)^2.(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^6} \underset{factorizamos}{=}$$

$$\frac{\left(x^2+x+1\right)^2(2x+1)\left[\left(x^2+x+1\right)(-6)-\left(-6x^2-6x\right)3.\right]}{\left(x^2+x+1\right)^6} \underset{simplificamos}{=}$$

$$\frac{(2x+1)\left(-6x^2-6x-6+18x^2+18x\right)}{\left(x^2+x+1\right)^4} = \frac{(2x+1)\left(12x^2+12x-6\right)}{\left(x^2+x+1\right)^4}$$

$$y''=0 \Rightarrow (2x+1)\left(12x^2+12x-6\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1}{2} \\ 12x^2+12x-6=0 \Rightarrow 2x^2+2x-1=0 \Rightarrow \\ x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+8}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-2+2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ x=\dfrac{-2+2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$\forall x \in \left(-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$ $y''(-4)<0$ convexa $\forall x \in \left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ $y''(-1)>0$ cóncava

$\forall x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ $y''(0)<0$ convexa $\forall x \in \left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$ $y''(0)<0$ cóncava

Puntos de inflexión en $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, $x=-\dfrac{1}{2}$ *y* *en* $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

4° Gráfica: