

Dibujar la gráfica de la función $y = \frac{2x}{x+1}$ indicando dominio, asíntotas e intervalos de crecimiento, decrecimiento y curvatura.

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R} - \{-1\}$

La función no existe si $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

2ª Asíntotas:

*A.V. : $D[f(x)] = \mathbb{R} - \{-1\}$

Luego tiene como posible asíntota vertical: $x=-1$?

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0}$$

hay que hacer límites laterales

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{-0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{+0} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x+1} \text{ No existe}$$

*A.H. :

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \text{ Luego "y=2" será una asíntota horizontal.}$$

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+1} \stackrel{\text{cambiamos } x \text{ por } -x}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{-x+1} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{-1} = 2 \text{ Luego "y=2" será una asíntota}$$

horizontal.

Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y = \frac{2x}{x+1}$	$y_1 - 2$	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
$x=100$	$y = \frac{2(100)}{101} = 1,980198$	$1,980198 - 2 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y = \frac{2(-100)}{-100+1} = 2,0202020$	$2,0202020 - 2 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $-\infty$

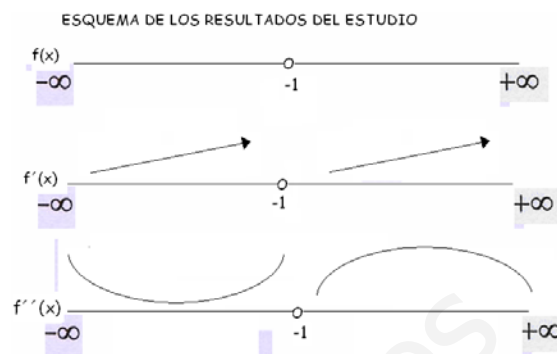
A.O. : No tiene porque tiene asíntota horizontal

3º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(x+1)(2) - (2x) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2 = 0 \Rightarrow \text{no existe } 2 \neq 0$$



$\forall x \in (-\infty, -1) \Rightarrow y'(-4) > 0$ creciente $\rightarrow$

$\forall x \in (-1, +\infty) \Rightarrow y'(4) < 0$ decreciente $\rightarrow$

No existe ni máximo ni mínimo relativo.

4º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{0 - 2 \cdot 2(x-1)}{(x+1)^4} = \frac{-4}{(x+1)^3}$$

simplificar

$y'' = 0 \Rightarrow -4 = 0 \Rightarrow$ no hay solución $-4 \neq 0$

No tiene puntos de inflexión

$\forall x \in (-\infty, -1) \Rightarrow y''(-8) > 0$  cóncava

$\forall x \in (-1, +\infty) \Rightarrow y''(8) < 0$  convexa

5º Gráfica:

