

Estudio completo de $y = \frac{x^3}{x^2 + 4}$

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

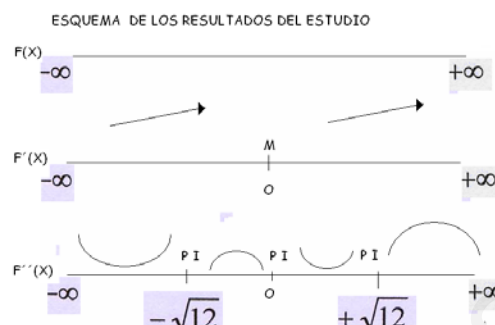
2º Cortes con los ejes:

Corte con OX: $(\pm, 0)$

$0 = x^3, x=0$; **(0,0)**

Corte con OY: $(0,?)$

$f(0) = 0$; **(0,0)**



3º Simetrías:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + 4} = -\frac{x^3}{x^2 + 4} = -f(x) \text{ es una función impar.}$$

4º Asíntotas:

A.V. : No tiene asíntotas verticales $f(x)$ siempre existe.

A.H. : 1º Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

No tiene asíntotas horizontales.

A.O. :A) Se calcula "m":

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 + 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua $y = x + n \rightarrow n = y - x$

B) Se calcula el "n":

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 - 4x}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x^2} = -0$$

C) Luego " $y = x$ " será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y = \frac{x^3}{x^2 + 4}$	$y = x$	$y_1 - y_2$	situación
$x=100$	$y_1 = \frac{100^3}{100^2 + 4} = 99,96001599$	$y_2 = 100$	$99,96001599 - 100 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y_1 = \frac{(-100)^3}{(-100)^2 + 4} = -99,96001599$	$y_2 = -100$	$-99,96001599 - (-100) > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $-\infty$

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(x^2 + 4)3x^2 - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x^4 + 12x^2}{(x^2 + 4)^2} \quad y' = 0 \Rightarrow x^4 + 12x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 + 12) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 + 12 = 0 \end{cases} \quad x = 0$$

$$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow y'(-4) > 0 \text{ creciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow y'(4) > 0 \text{ creciente} \rightarrow$$

No tiene ni máximos ni mínimos relativos.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{(x^2 + 4)^2(4x^3 + 24x) - (x^4 + 12x^2)2 \cdot 2x(x^2 + 4)}{(x^2 + 4)^4} = \frac{(x^2 + 4)(4x^5 + 16x^3 + 24x^3 + 96x - 4x^5 - 48x^3)}{(x^2 + 4)^4} = \frac{-8x^3 + 96x}{(x^2 + 4)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow -8x^3 + 96x = 0 \Rightarrow 8x(-x^2 + 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = +\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, -\sqrt{12}) \Rightarrow y''(-8) > 0 \quad \text{cónica}$$

$$\forall x \in (-\sqrt{12}, 0) \Rightarrow y''(-1) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in (0, \sqrt{12}) \Rightarrow y''(1) > 0 \quad \text{cónica}$$

$$\forall x \in (\sqrt{12}, +\infty) \Rightarrow y''(8) > 0 \quad \text{convexa}$$

La función tiene 3 puntos de inflexión : $(0, 0)$; $(-2\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$

7º Gráfica:

