

Estudio completo de $y = \sqrt[3]{x}$.

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

Función irracional de índice impar siempre existe.

2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: $(\neq, 0)$

$0 = \sqrt[3]{x}$, $x=0$; **$(0,0)$**

Corte con OY: $(0, ?)$

$f(0) = 0$; **$(0,0)$**

3º Simetrías:

$$f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$$

Es una función impar.

Simétrica respecto del origen de coordenadas $(0,0)$.

4º Asíntotas:

***A.V.** : $D[f(x)] = \mathbb{R}$

Luego no tiene asíntota vertical

***A.H.** : Por no ser una función del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\begin{cases} P(x) & \text{polinomio} \\ Q(x) & \text{polinomio} \end{cases}$ hay que

calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty \text{ Luego no hay asíntota horizontal.}$$

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty \text{ Luego no hay asíntota horizontal.}$$

***A.O.** : $y = m x + n$

1º Se calcula "m":

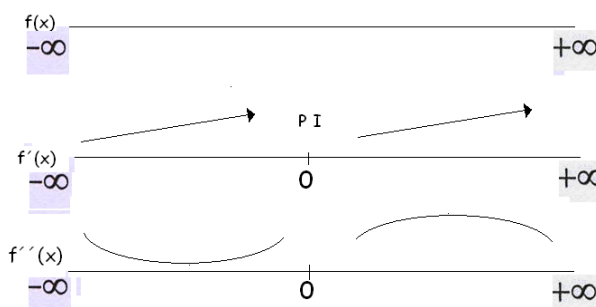
$$- \text{ A) } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{\substack{\infty \\ x \rightarrow +\infty}} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{\substack{\infty \\ x \rightarrow +\infty}} \frac{1}{\frac{2}{x^3}} = \frac{1}{+\infty} = +0$$

No hay asíntota oblicua pero la curvatura será

$$- \text{ B) } m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{\substack{\infty \\ x \rightarrow -\infty}} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{\substack{\infty \\ x \rightarrow -\infty}} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{\substack{\infty \\ x \rightarrow -\infty}} \frac{-1}{\frac{2}{x^3}} = \frac{-1}{+\infty} = -0$$

No hay asíntota oblicua pero la curvatura será

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



5º Monotonía. Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía de $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

$y' = 0 \Rightarrow 1 \neq 0$ luego nunca se anula la derivada y' .

Pero y' deja de existir si $\sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ y puede haber un cambio de monotonía.

$$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow y'(-15) > 0 \quad \text{creciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow y'(15) > 0 \quad \text{creciente} \rightarrow$$

No existen ni máximos ni mínimos relativos.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{3} \cdot x^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^5}}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y'' \neq 0 \Rightarrow -2 \neq 0$ luego nunca se anula la derivada y'' .

Pero y'' deja de existir si $\sqrt[3]{x^5} = 0 \Rightarrow x = 0$ y podría haber un cambio de curvatura, cosa imposible en este por tener en $x=0$ un mínimo relativo

$$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow y''(-8) > 0 \quad \text{cónica}$$

$$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow y''(1) < 0 \quad \text{convexa}$$

No hay puntos de inflexión.

7º Gráfica:

