

Estudio completo de $y = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$

1º Dominio de $f(x)$:

$$D[f(x)] = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

La función no existe si

$$x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: $(x, 0)$

$$0 = 2x^2, x=0; (0, 0)$$

Corte con OY: $(0, y)$

$$f(0) = 0; (0, 0)$$

3º Simetrías:

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{2x^2}{x^2 - 4} = f(x) \text{ es una función par.}$$

4º Asíntotas:

*A.V. : $D[f(x)] = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Luego tiene como posible asíntota vertical: $x=2$? o $x=-2$?

A) ¿A.V. en $x=-2$. ?

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \frac{8}{0} \text{ hay que hacer límites laterales} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \frac{8}{+0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \frac{8}{-0} = -\infty \end{cases} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2}{x^2 - 4} \text{ No existe}$$

Este límite nos sirve para determinar que $x=-2$ ASÍNTOTA VERTICAL

B) ¿A.V. en $x=2$. ?

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \frac{8}{0} \text{ hay que hacer límites laterales} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \frac{8}{-0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \frac{8}{+0} = +\infty \end{cases} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{x^2 - 4} \text{ No existe}$$

Este límite nos sirve para determinar que $x=2$ ASÍNTOTA VERTICAL

*A.H. :

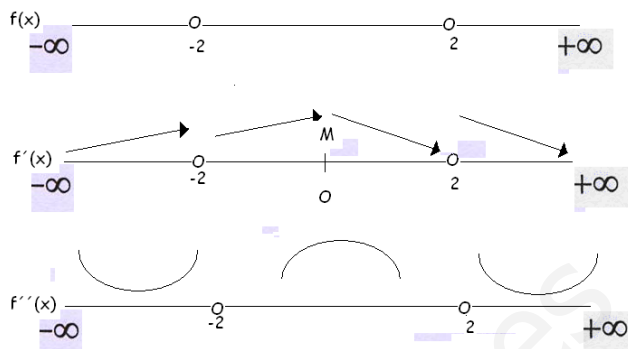
A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \text{ Luego "y=2" será una asíntota horizontal.}$$

B) Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$	$y_1 - 2$	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
$x=100$	$y = \frac{2(100)^2}{(100)^2 - 4} = 2,00080032$	$2,00080032 - 2 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y = \frac{2(-100)^2}{(-100)^2 - 4} = 2,00080032$	$2,00080032 - 2 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $-\infty$

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



A.O. :No tiene porque tiene asíntota horizontal

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(x^2 - 4)(4x) - (2x) \cdot 2x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^3 - 16x - 4x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow -16x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\forall x \in (-\infty, -2) \Rightarrow y'(-4) > 0 \text{ creciente} \quad \forall x \in (-2, 0) \Rightarrow y'(-1) > 0 \text{ creciente}$$

$$\forall x \in (0, 2) \Rightarrow y'(1) < 0 \text{ decreciente} \quad \forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow y'(4) < 0 \text{ decreciente}$$

En (0,0) existe un Máximo relativo.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{(x^2 - 4)^2 \cdot (-16) - (-16x) \cdot 2 \cdot 2x(x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^4} \underset{\text{factorizar}}{=} \frac{(x^2 - 4)(-16x^2 + 64 + 64x^2)}{(x^2 - 4)^4} = \frac{48x^2 + 64}{(x^2 - 4)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 48x^2 + 64 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{4}{3} \text{ no hay solución}$$

No tiene puntos de inflexión

$$\forall x \in (-\infty, -2) \Rightarrow y''(-8) > 0 \text{ cóncava}$$

$$\forall x \in (-2, 2) \Rightarrow y''(0) < 0 \text{ convexa}$$

$$\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow y''(8) > 0 \text{ cóncava}$$

7º Gráfica:

