

Ejercicio 1

Desarrolla y simplifica:

$$(x-1)(x^2+x)^2 - (x^5 - 5x^4 + x^3 - x^2)$$

Solución:

$$\begin{aligned}(x-1)(x^2+x)^2 - (x^5 - 5x^4 + x^3 - x^2) &= (x-1)(x^4 + 2x^3 + x^2) - (x^5 - 5x^4 + x^3 - x^2) = \\ &= x^5 + 2x^4 + x^3 - x^4 - 2x^3 - x^2 - x^5 + 5x^4 - x^3 + x^2 = 6x^4 - 2x^3\end{aligned}$$

Ejercicio 2

Calcula y simplifica:

$$(x+1)^2(3x^2+2) - 2(x^4 - x^3 + 2x^2 - 1)$$

Solución:

$$\begin{aligned}(x+1)^2(3x^2+2) - 2(x^4 - x^3 + 2x^2 - 1) &= (x^2 + 2x + 1)(3x^2 + 2) - 2(x^4 - x^3 + 2x^2 - 1) = \\ &= 3x^4 + 2x^2 + 6x^3 + 4x + 3x^2 + 2 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 2 = x^4 + 8x^3 + x^2 + 4x + 4\end{aligned}$$

Ejercicio 3

Desarrolla y simplifica:

$$(2x-3)^2 - (2x^2 + 4x + 1)(x-2)$$

Solución:

$$\begin{aligned}(2x-3)^2 - (2x^2 + 4x + 1)(x-2) &= (4x^2 - 12x + 9) - (2x^3 + 4x^2 + x - 4x^2 - 8x - 2) = \\ &= 4x^2 - 12x + 9 - (2x^3 - 7x - 2) = 4x^2 - 12x + 9 - 2x^3 + 7x + 2 = -2x^3 + 4x^2 - 5x + 11\end{aligned}$$

Ejercicio 4

Opera y simplifica:

$$(x^2 - 2x + 3)(2x + 1) - (4x - 1)^2$$

Solución:

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + 3)(2x + 1) - (4x - 1)^2 &= (2x^3 + x^2 - 4x^2 - 2x + 6x + 3) - (16x^2 - 8x + 1) = \\ &= 2x^3 - 3x^2 + 4x + 3 - 16x^2 + 8x - 1 = 2x^3 - 19x^2 + 12x + 2\end{aligned}$$

Ejercicio 6

Desarrolla y simplifica:

$$\left(\frac{2}{3}x - 1\right)(3x + 6) + (x + 1)(x - 1) - (x + 2)^2$$

Solución:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}x - 1\right)(3x + 6) + (x + 1)(x - 1) - (x + 2)^2 &= (2x^2 + 4x - 3x - 6) + (x^2 - 1) - (x^2 + 4x + 4) = \\ &= 2x^2 + x - 6 + x^2 - 1 - x^2 - 4x - 4 = 2x^2 - 3x - 11\end{aligned}$$

Ejercicio 7

Calcula el cociente y el resto de cada división:

a) $(2x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 1) : (x^3 - 2x + 1)$

b) $(2x^5 - 3x^3 + 2x - 1) : (x + 2)$

Solución:

$$\begin{array}{r} \text{a) } \begin{array}{r} 2x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 1 \\ - 2x^5 - 2x^2 \\ \hline - 3x^4 + 4x^3 - x + 1 \\ 3x^4 - 6x^2 + 3x \\ \hline 4x^3 - 6x^2 + 2x + 1 \\ - 4x^3 + 8x - 4 \\ \hline - 6x^2 + 10x - 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{) x^2 + 2 + 1} \\ \underline{2x^2 - 3x + 4} \end{array} \end{array}$$

$$\text{Cociente} = 2x^2 - 3x + 4$$

$$\text{Resto} = -6x^2 + 10x - 3$$

b) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & 0 & -3 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & & -4 & 8 & -10 & 20 & -44 \\ \hline & 2 & -4 & 5 & -10 & 22 & -45 \end{array}$$

$$\text{Cociente} = 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 10x + 22$$

$$\text{Resto} = -45$$

Ejercicio 8

Halla el cociente y el resto de cada división:

a) $(4x^3 - 2x^2 + 5x + 3) : (x^2 - 2)$

b) $(x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5) : (x + 1)$

Solución:

$$\begin{array}{r} \text{a) } \begin{array}{r} 4x^3 - 2x^2 + 5x + 3 \\ -4x^3 + 8x \\ \hline -2x^2 + 13x + 3 \\ 2x^2 - 4 \\ \hline 13x - 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 - 2 \\ 4x - 2 \end{array} \end{array}$$

$$\text{Cociente} = 4x - 2$$

$$\text{Resto} = 13x - 1$$

b) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -3 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & & -1 & 4 & -6 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 6 & -6 & 11 \end{array}$$

$$\text{Cociente} = x^3 - 4x^2 + 6x - 6$$

$$\text{Resto} = 11$$

Ejercicio 9

Calcula el cociente y el resto de cada una de estas divisiones:

a) $(5x^4 + x^3 - 2x + 1) : (x^2 - 3x + 1)$

b) $(5x^4 - x^3 + 2x - 1) : (x + 2)$

Solución:

$$\begin{array}{r} \text{a) } \begin{array}{r} 5x^4 + x^3 - 2x^2 + 1 \\ -5x^4 + 15x^3 - 5x^2 \\ \hline 16x^3 - 7x^2 + 1 \\ -16x^3 + 48x^2 - 16x \\ \hline 41x^2 - 16x + 1 \\ -41x^2 + 123x - 41 \\ \hline 107x - 40 \end{array} \quad \begin{array}{l} + 1 \quad | \quad x^2 - 3x + 1 \\ \hline 5x^2 + 16x + 41 \end{array} \end{array}$$

$$\text{Cociente} = 5x^2 + 16x + 41$$

$$\text{Resto} = 107x - 40$$

b) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 5 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & & -10 & 22 & -11 & 84 \\ \hline & 5 & -11 & 22 & -42 & 83 \end{array}$$

$$\text{Cociente} = 5x^3 - 11x^2 + 22x - 42$$

$$\text{Resto} = 83$$

Ejercicio 10

Halla el cociente y el resto de cada división:

a) $(2x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 1) : (x^2 + 2)$

b) $(-3x^4 + 6x^2 + x - 2) : (x - 1)$

Solución:

a)

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 1 \\ -2x^4 - 4x^2 \\ \hline -7x^3 - x^2 - 1 \\ 7x^3 + 14x \\ \hline -x^2 + 14x - 1 \\ x^2 + 2 \\ \hline 14x + 1 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} x^2 + 2 \\ 2x^2 - 7x - 1 \\ \hline \end{array}$$

Cociente = $2x^2 - 7x - 1$

Resto = $14x + 1$

b) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & -3 & 0 & 6 & 1 & -2 \\ 1 & & -3 & -3 & 3 & 4 \\ \hline & -3 & -3 & 3 & 4 & 2 \end{array}$$

Cociente = $-3x^3 - 3x^2 + 3x + 4$

Resto = 2

Ejercicio 11

Halla el cociente y el resto de cada división:

a) $(-2x^4 + 3x^3 - 2x + 3) : (x^2 - 2x + 2)$

b) $(-x^4 + 2x^2 - x + 2) : (x + 2)$

Solución:

$$\begin{array}{r} -2x^4 + 3x^3 \qquad -2x + 3 \\ \underline{2x^4 - 4x^3 + 4x^2} \\ -x^3 + 4x^2 - 2x + 3 \\ \underline{x^3 - 2x^2 + 2x} \\ 2x^2 + 3 \\ \underline{-2x^2 + 4x - 4} \\ 4x - 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \boxed{x^2 - 2x + 2} \\ -2x^2 - x + 2 \end{array}$$

Cociente = $-2x^2 - x + 2$
Resto = $4x - 1$

b) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & & 2 & -4 & 4 & -6 \\ \hline & -1 & 2 & -2 & 3 & -4 \end{array}$$

Cociente = $-x^3 + 2x^2 - 2x + 3$
Resto = -4

Ejercicio 12

Halla el valor de k para que la siguiente división sea exacta:

$(3x^2 + kx - 2) : (x + 2)$

Solución:

Llamamos $P(x) = 3x^2 + kx - 2$.

Para que la división sea exacta (resto nulo), según el Teorema del Resto, ha de ser $P(-2) = 0$; es decir:

$$P(-2) = 12 - 2k - 2 = 10 - 2k = 0 \rightarrow k = 5$$

Ejercicio 13

- a) Halla el valor numérico de $P(x) = -2x^3 + x^2 - 3x - 6$ para $x = -1$
- b) ¿Es divisible el polinomio anterior, $P(x)$, entre $x + 1$?

Solución:

- a) $P(-1) = 2 + 1 + 3 - 6 = 0$
- b) Sí. Por el teorema del resto, sabemos que el resto de la división $P(x) : (x + 1)$ coincide con $P(-1)$. En este caso $P(-1) = 0$; por tanto, $P(x)$ es divisible entre $x + 1$.

Ejercicio 14

Dado el polinomio $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + 3x - 1$:

- a) Halla el cociente y el resto de la división:
 $P(x) : (x - 2)$
- b) ¿Cuánto vale $P(2)$?

Solución:

- a) Aplicamos la regla de Ruffini:

	4	-8	3	1
2		8	0	6
	4	0	3	5

Cociente = $4x^2 + 3$
Resto = 5

- b) Por el teorema del resto, sabemos que $P(2) = 5$.

Ejercicio 15

Halla el valor de k para que el polinomio $P(x) = kx^3 + 2kx^2 - 3x + 1$ sea divisible entre $x - 1$.

Solución:

Para que $P(x)$ sea divisible entre $x - 1$, según el Teorema del Resto, ha de ser $P(1) = 0$; es decir:

$$P(1) = k + 2k - 3 + 1 = 3k - 2 = 0 \rightarrow k = \frac{2}{3}$$

Ejercicio 16

a) Halla el valor numérico de $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3$ para $x = 1$.

b) ¿Es divisible el polinomio anterior, $P(x)$, entre $x - 1$?

Solución:

a) $P(1) = 3 - 2 + 2 - 3 = 0$

b) Si. Por el teorema del resto, sabemos que el resto de la división $P(x) : (x - 1)$ coincide con $P(1)$. En este caso $P(1) = 0$, por tanto, $P(x)$ es divisible entre $x - 1$.

Ejercicio 17

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^4 - 18x^2$

b) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$

Solución:

a) Sacamos factor común y tenemos en cuenta que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:
 $2x^4 - 18x^2 = 2x^2(x^2 - 9) = 2x^2(x + 3)(x - 3)$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	-1	-1	-1	-2
-1		-1	2	-1	2
	1	-2	1	-2	0
2		2	0	2	
	1	0	1	0	

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)$$

(El polinomio $x^2 + 1$ no tiene raíces reales).

Ejercicio 18

Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 13x^2 + 36x$

b) $2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$

Solución:

- a) Sacamos factor común y hallamos las otras raíces resolviendo la ecuación de segundo grado (también podríamos mediante la Regla de Ruffini):

$$x^3 - 13x^2 + 36x = x(x^2 - 13x + 36)$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0 \rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \begin{matrix} \text{É} & x = 9 \\ \text{Ç} & x = 4 \end{matrix}$$

Por tanto:

$$x^3 - 13x^2 + 36x = x(x - 9)(x - 4)$$

- b) Utilizamos la regla de Ruffini:

	2	-9	-8	15
1		2	-7	-15
	2	-7	-15	0
5		10	15	
	2	3	0	

$$2x^3 - 9x^2 - 8x + 15 = (x - 1)(x - 5)(2x + 3)$$

Ejercicio 19

Factoriza estos polinomios:

a) $x^4 - 2x^3 + x^2$

b) $x^3 - 4x^2 + x + 6$

Solución:

a) Sacamos factor común y utilizamos Ruffini, aunque también podemos factorizar el polinomio resultante haciendo uso de uno de los binomios notables: $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2 (x^2 - 2x + 1) = x^2 (x - 1)^2$$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	-4	1	6
2		2	-4	-6
	1	-2	-3	0
3		3	3	
	1	1	0	

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)(x - 3)(x + 1)$$

Ejercicio 20

Factoriza los polinomios siguientes:

a) $x^3 + 2x^2 + x$

b) $x^3 + 7x^2 + 7x - 15$

Solución:

a) Sacamos factor común y utilizamos que $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$:
 $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	7	7	-15
1		1	8	15
	1	8	15	0
-3		-3	-15	
	1	5	0	

$$x^3 + 7x^2 + 7x - 15 = (x - 1)(x + 3)(x + 5)$$

Ejercicio 21

Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^5 + x^4 - 2x^3$

b) $x^3 - 3x + 2$

Solución:

a) Sacamos factor común y hallamos las otras raíces resolviendo la ecuación:

$$x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3(x^2 + x - 2)$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad \begin{array}{l} \text{É } x = 1 \\ \text{Ç } x = -2 \end{array}$$

Por tanto:

$$x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3(x-1)(x+2)$$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0
1		1	2	
	1	2	0	

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

Ejercicio 22

Simplifica la fracción algebraica:

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^2 + x - 6}$$

Solución:

Factorizamos ambos polinomios:

$$2x^3 - 5x^2 + 3x = x \cdot (2x^2 - 5x + 3)$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} \quad \begin{array}{l} \text{É} \quad \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \text{Ç} \quad \frac{4}{4} = 1 \end{array}$$

Luego:

$$2x^3 - 5x^2 + 3x = x(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$2x^2 + x - 6 = (x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right) \text{ ya que:}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} \quad \begin{array}{l} \text{É} \quad \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \text{Ç} \quad \frac{-8}{4} = -2 \end{array}$$

Por tanto:

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^2 + x - 6} = \frac{x(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)}{(x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{x(x-1)}{x+2}$$

Ejercicio 23

Descompón en factores el dividendo y el divisor y después simplifica:

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 12x}{x^3 + 3x^2 - 16x - 48}$$

Solución:

- Numerador → Sacamos factor común y descomponemos en factores el polinomio de grado 2 que nos queda:

$$x^3 + 7x^2 + 12x = x(x^2 + 7x + 12)$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2} \quad \begin{array}{l} \text{É} \quad -\frac{8}{2} = -4 \\ \text{Ç} \quad -\frac{6}{2} = -3 \end{array}$$

Así:

$$x^3 + 7x^2 + 12x = x(x + 4)(x + 3)$$

- Denominador → Descomponemos aplicando Ruffini:

	1	3	-16	-48
4		4	28	48
	1	7	12	0

$x^2 + 7x + 12$ es una expresión de 2º grado cuyas raíces se calculan resolviendo la ecuación: $x^2 + 7x + 12 = 0$, que coincide con la del numerador. Así, finalmente, el denominador descompuesto en factores será: $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = (x - 4)(x + 4)(x + 3)$

- Simplificación de la fracción algebraica:

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 12x}{x^3 + 3x^2 - 16x - 48} = \frac{x(x + 4)(x + 3)}{(x - 4)(x + 4)(x + 3)} = \frac{x}{x - 4}$$

Ejercicio 24

Descompón en factores el dividendo y el divisor, y luego simplifica:

$$\frac{3x^3 - 3x}{x^5 - x}$$

Solución:

$$\frac{3x^3 - 3x}{x^5 - x} = \frac{3x(x^2 - 1)}{x(x^4 - 1)} = \frac{3x(x^2 - 1)}{x(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{3}{x^2 + 1}$$

En el primer paso sacamos factor común y en el segundo paso aplicamos el producto notable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ a la expresión $x^4 - 1$.

Ejercicio 25

Simplifica la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{2x^3 + 10x^2 + 16x + 8}{4x^3 + 8x^2 - 4x - 8}$$

Solución:

Descomponemos factorialmente el numerador y el denominador:

- Numerador → Sacamos factor común 2 y aplicamos la regla de Ruffini hasta llegar a un polinomio de 2º grado:

$$2x^3 + 10x^2 + 16x + 8 = 2(x^3 + 5x^2 + 8x + 4)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 8 & 4 \\ -2 & & -2 & -6 & -4 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \quad \begin{array}{l} \text{É} \quad \frac{-4}{2} = -2 \\ \text{Ç} \quad \frac{-2}{2} = -1 \end{array}$$

Así:

$$2x^3 + 10x^2 + 16x + 8 = 2(x+2)^2(x+1)$$

- Denominador → Sacamos factor común 4 y aplicamos la regla de Ruffini hasta llegar a un polinomio de 2º grado:

$$4x^3 + 8x^2 - 4x - 8 = 4(x^3 + 2x^2 - x - 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & & -2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

Así:

$$4x^3 + 8x^2 - 4x - 8 = 4(x+2)(x+1)(x-1)$$

- Simplificación:

$$\frac{2x^3 + 10x^2 + 16x + 8}{4x^3 + 8x^2 - 4x - 8} = \frac{2(x+2)^2(x+1)}{4(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{(x+2)}{2(x-1)} = \frac{x+2}{2x-2}$$

Se obtiene dividiendo numerador y denominador entre el M.C.D. de ambos, que es $2(x+2)(x+1)$.

Ejercicio 26

Descompón en factores el numerador y el denominador, y luego simplifica.

$$\frac{x^3 - 49x}{x^4 - 7x^3}$$

Solución:

$$\frac{x^3 - 49x}{x^4 - 7x^3} = \frac{x(x^2 - 49)}{x^3(x - 7)} = \frac{x(x - 7)(x + 7)}{x^3(x - 7)} = \frac{x + 7}{x^2}$$

En el primer paso sacamos factor común; en el segundo paso aplicamos la identidad notable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ a la expresión $x^2 - 49$, y finalmente dividimos numerador y denominador entre el M.C.D. de ambos, que es $x(x - 7)$.

Ejercicio 27

Opera y simplifica:

a) $\left(x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x^2}\right)$

b) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{2+x}{x^2-4x+4}$

Solución:

a) Observamos que tenemos el producto notable $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

Así:

$$\left(x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x^2}\right) = x^2 - \frac{1}{x^4} = \frac{x^6 - 1}{x^4}$$

b) Calculamos el m.c.m. $[(x - 2), (x^2 - 4x + 4)]$ que es $(x - 2)^2$.

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

Luego:

$$\frac{x+1}{x-2} + \frac{2+x}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2} + \frac{2+x}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 2x + x - 2 + 2 + x}{(x-2)^2} = \frac{x^2}{(x-2)^2}$$

Ejercicio 28

Calcula y simplifica:

a) $\frac{1}{x^2 - x} + \frac{2x - 1}{x - 1} - \frac{3x - 1}{x}$

b) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x - 15} : \frac{2x - 10}{x^2 - 25}$

Solución:

a) m.c.m. $[(x^2 - x), (x - 1), x] = x(x - 1)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2 - x} + \frac{2x - 1}{x - 1} - \frac{3x - 1}{x} &= \frac{1}{x(x - 1)} + \frac{x(2x - 1)}{x(x - 1)} - \frac{(3x - 1)(x - 1)}{x(x - 1)} = \\&= \frac{1}{x(x - 1)} + \frac{2x^2 - x}{x(x - 1)} - \frac{3x^2 - 3x - x + 1}{x(x - 1)} = \frac{1 + 2x^2 - x - 3x^2 + 3x + x - 1}{x(x - 1)} = \\&= \frac{-x^2 + 3x}{x(x - 1)} = \frac{x(-x + 3)}{x(x - 1)} = \frac{-x + 3}{x - 1}\end{aligned}$$

b) Efectuamos el cociente:

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x - 15} : \frac{2x - 10}{x^2 - 25} = \frac{(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 25)}{(x^2 + 2x - 15)(2x - 10)}$$

Factorizamos para simplificar:

- $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5) \rightarrow$ Producto notable

$$2x - 10 = 2(x - 5)$$

- $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, ya que las raíces de $x^2 - 6x + 9 = 0$ son:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow \text{Raíz doble}$$

- $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$, ya que las raíces de $x^2 + 2x - 15 = 0$ son:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \quad \begin{array}{l} \text{É} \quad \frac{-10}{2} = -5 \\ \text{Ç} \quad \frac{6}{2} = 3 \end{array}\end{aligned}$$

Así:

$$\frac{(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 25)}{(x^2 + 2x - 15)(2x - 10)} = \frac{(x - 3)^2(x - 5)(x + 5)}{(x + 5)(x - 3)2(x - 5)} = \frac{x - 3}{2}$$

Ejercicio 29

Efectúa y simplifica:

a) $\left(\frac{1}{x} + x\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$

b) $1 + \frac{1}{2x-1} - \frac{2x}{4x^2-1}$

Solución:

a) Efectuamos cada paréntesis y luego multiplicamos:

$$\left(\frac{1}{x} + x\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1+x^2}{x} \cdot \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{1+x^2}{x} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{1+x^2}{x+1}$$

b) Observamos que $4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)$.

Así, el m.c.m. $[1, (2x - 1), (4x^2 - 1)] = (2x - 1)(2x + 1)$.

Luego:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2x-1} - \frac{2x}{4x^2-1} &= \frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)} + \frac{2x+1}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{2x}{(2x-1)(2x+1)} = \\ &= \frac{4x^2 - 1 + 2x + 1 - 2x}{4x^2 - 1} = \frac{4x^2}{4x^2 - 1} \end{aligned}$$

Ejercicio 30

Opera y simplifica:

a) $\frac{2x}{x+1} : \left(\frac{2x}{x+1} - 1 \right)$

b) $\frac{x-2}{2x} - \frac{1-3x}{3x^2} + \frac{2x^2+3}{6x^4}$

Solución:

a) El paréntesis da prioridad a la resta:

$$\frac{2x}{x+1} - 1 = \frac{2x}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$$

Efectuamos el cociente:

$$\frac{2x}{x+1} : \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x-1}$$

b) m.c.m. $(2x, 3x^2, 6x^4) = 6x^4$

Así:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{2x} - \frac{1-3x}{3x^2} + \frac{2x^2+3}{6x^4} &= \frac{3x^3(x-2)}{6x^4} - \frac{2x^2(1-3x)}{6x^4} + \frac{2x^2+3}{6x^4} = \\ &= \frac{3x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 6x^3 + 2x^2 + 3}{6x^4} = \frac{3x^4 + 3}{6x^4} = \frac{3(x^4 + 1)}{6x^4} = \frac{x^4 + 1}{2x^4} \end{aligned}$$

Ejercicio 31

Calcula y simplifica:

a) $\frac{x^4 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x}$

b) $\frac{2x + 4}{x + 4} - \frac{2x - 14}{x - 5}$

Solución:

a) Efectuamos el producto:

$$\frac{x^4 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x} = \frac{(x^4 - 3x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 6x + 9)}{(x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 + 2x)}$$

Factorizamos para simplificar:

- $x^4 - 3x^2 + 2x = x(x^3 - 3x + 2)$

Aplicamos Ruffini para calcular las raíces de la ecuación $x^3 - 3x + 2 = 0$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad \begin{array}{l} \text{É} \quad \frac{2}{2} = 1 \\ \text{Ç} \quad \frac{-4}{2} = -2 \end{array}$$

Así:

$$x^4 - 3x^2 + 2x = x(x-1)^2(x+2)$$

- $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$
- $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
- $x^2 + 2x = x(x+2)$

Por tanto:

$$\frac{(x^4 - 3x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 6x + 9)}{(x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 + 2x)} = \frac{x(x-1)^2(x+2) \cdot (x-3)^2}{(x-1)^2 \cdot x(x+2)} = (x-3)^2$$

b) m.c.m. $[(x+4), (x-5)] = (x+4)(x-5)$