Junio 2006

- CUESTIÓN 1.A.

  La suma de las tres cifras de un número es 6 y si se intercambian la primera y la segunda, el número aumenta en 90 unidades. Finalmente si se intercambian la segunda y la tercera, el número aumenta en 9 unidades. Calcular dicho número.

  selcs Jun 2006 Solución:

  Sea el número de tres cifras "xyz", las condiciones se pueden expresar:

  $x+y+z=6$
  y x z = x y z + 90
  x z y = x y z + 9

  expresando los números en su descomposición polinómica:

  $$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 100y+10x+z=100x+10y+z+90 \\ 100x+10z+x=100x+10y+z+9 \end{cases}$$

  $$\begin{cases} x+y+z=6 \\ -90x+90y=90 \\ 9z-9y=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=6 \\ -x+y=1 \\ -y+z=1 \end{cases}$$

  que resuelto por Gauss da $z=3, y=2, x=1$. El número es el 123.

- CUESTIÓN 1.B. Una persona tiene 500000 euros para invertir en dos tipos de acciones A y B. Las acciones de tipo A tienen bastante riesgo con un interés anual del 10 % y las acciones del tipo B son bastante seguras con un interés anual del 7 %. Decide invertir como máximo 300000 euros en las de tipo A y como mínimo 100000 euros en las de tipo B e invertir en las de tipo A por lo menos tanto como en las de tipo B. ¿Cómo debería invertir sus 500000 euros para maximizar sus intereses anuales?

  selcs Jun 2006 Solución:

  $x=$ número de euros invertido en acciones tipo A
  $y=$ número de euros invertido en acciones tipo B

  $$\begin{cases} x+y\leq 500000 \\ x\leq 300000 \\ y\geq 100000 \\ x\leq y \end{cases}$$

  Ganancia: $f(x,y)=0'1x+0'07y$

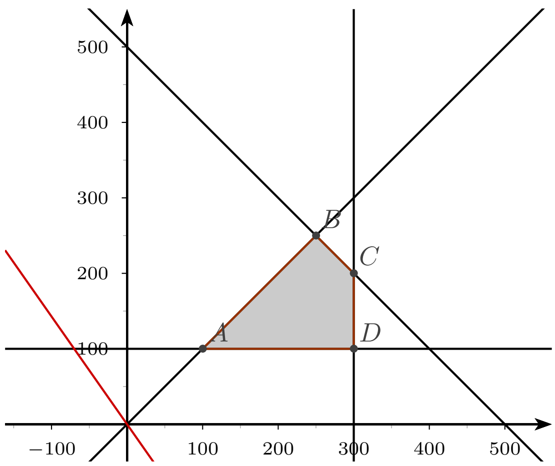
  Representamos (trabajaremos en miles):

  $x+y\leq 500$

x	0	500
y	500	0

  $x\leq y$

x	0	200
y	0	200

  Ahora la función igualada a 0:

  $f(xy)=0'1x+0'07y=0$

x	0	-70
y	0	100

  Para maximizar hallamos y probamos los puntos B y C

  $$\begin{cases} x+y=500 \\ x=y \end{cases} \qquad B=(250,250,) \quad f(250,250)=0'1\cdot 250+0'07\cdot 250=42'5$$

  $$\begin{cases} x+y=500 \\ x=300 \end{cases} \qquad C=(300,200,) \quad f(300,200)=0'1\cdot 300+0'07\cdot 200=44$$

  Por tanto para maximizar los beneficios ha de invertir 300.000 € en las acciones de tipo A y 200.000 € en las acciones de tipo B que le producirían 44000 € .

- CUESTIÓN 2.A. [1.5 PUNTOS]

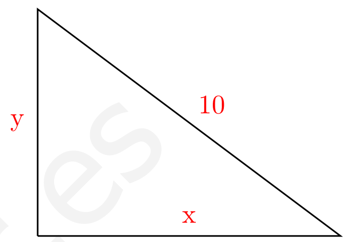
Hallar las dimensiones de los lados de un triángulo rectángulo, de 10 metros de hipotenusa, para que su área sea máxima. ¿Cuál será dicha área?

selcs Jun 2006 Solución:

$S = \dfrac{x \cdot y}{2}$ máxima

Por Pitágoras: $x^2 + y^2 = 10^2$; $\quad y = \sqrt{100 - x^2}$ sustituyendo:

$S(x) = \dfrac{1}{2} x \sqrt{100 - x^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{100x^2 - x^4}$



Derivando y anulando la derivada:

$s'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{200x - 4x^3}{2\sqrt{100x^2 - x^4}} = 0$

Basta anular el numerador:

$200x - 4x^3 = 0$; $\quad x(200 - x^2) = 0$; $\quad 200 - 4x^2 = 0$; $\quad x2 = 50$; $\quad x = \pm\sqrt{50}$

Con el estudio del crecimiento comprobamos que es máximo:

x		$\sqrt{50}$	
y'	$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$

Hallamos el otro cateto $y = \sqrt{100 - \sqrt{50}^2} = \sqrt{50}$ y el área máxima: $S = \dfrac{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50}}{2} = 25$

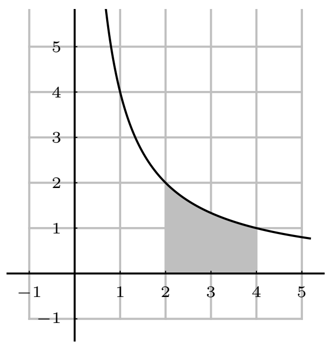
- CUESTIÓN 2.B. [1.5 PUNTOS]

Hallar el área encerrada por la curva $x.y = 4$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

selcs Jun 2006 Solución:

Buscamos los puntos de corte de las dos funciones:

Área$= \displaystyle\int_2^4 \frac{4}{x} dx = 4 \int_2^4 \frac{1}{x} dx = 4\left[\ln|x|\right]_2^4 =$ $4(\ln 4 - \ln 2) = 4 \ln 2 = 2'7722u^2$



- CUESTIÓN 3.A. [2 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$, se pide:

(a) Calcular su dominio

(b) Calcular sus asíntotas

(c) Estudiar la monotonía y los extremos

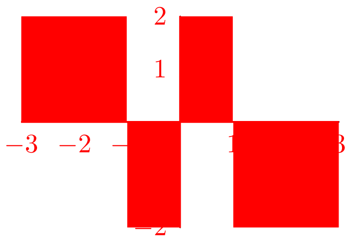
(d) Hacer su representación gráfica aproximada.

selcn Junio 2006 Solución: Primero representaremos y después responderemos a los apartados que falten:

1) Dominio y regionamiento Estudiamos el signo de la función.

Para ello escribimos la función en la forma:

$f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)(x-1)}$



Hallando las raíces de numerador y denominador resulta que delimitan región de cambio de signo de $y: \quad x = 0, x = 1, x = -1$

x		-1		0		1	
y	$-$		$+$		$-$		$+$

El dominio es $R - \{-1, 1\}$

2) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY: x = 0$, resulta $y = 0$

con $OX: y = 0$, resulta $x = 0$

3) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales $x = -1, \quad x = 1$

Asíntota horizontal $n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \infty$ no hay

Asíntota oblicua $y = mx + n$ $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^3 - x} = 1$

$n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{x^3}{x^2-1} - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0$

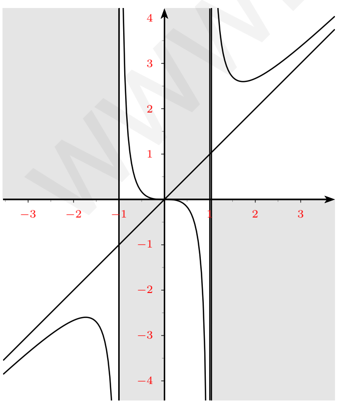
Asíntota oblicua $y = x$

4) Extremos y crecimiento Estudiamos el signo de la derivada

$f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0$

$x^4 - 3x^2 = 0 \quad x = 0, x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
y'	$+$		$-$		$-$		$+$
y	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	INFLEXION	$\searrow$	MIN	$\nearrow$



- CUESTIÓN 3.B. [2 PUNTOS]

  Hallar los valores de a, b, c y d en la función $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que su tangente en el punto $(1, 1)$ es la recta $y = -x + 2$ y que tiene un extremo en el punto $(0, 2)$.

selcs Jun 2006 Solución:

$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

De que la tangente en el punto $(1, 1)$ sea la recta $y = -x + 2$, resulta:

> Pasa por $(1, 1)$ luego $f(1) = 1$ sustituyendo "x" e "y" queda: $a + b + c + d = 1$
> La pendiente en $x = 1$ es -1 es decir $f'(1) = -1$, sustituyendo "x" e "y'" en la derivada queda: $3a + 2b + c = -1$

De que tiene un extremo en el punto $(0, 2)$, resulta:

> Pasa por $(0, 2)$ luego $f(0) = 2$ sustituyendo "x" e "y" queda: $d = 0$
> Tiene extremo en $x = 0$ luego la derivada se anula en $x = 0$, queda: $f'(0) = c = 0$

Por tanto el sistema con cuatro incógnitas iniciales queda reducido a:

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + 2 = 1 \\ 3a + 2b = -1 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} -2 - 2b = 2 \\ 3a + 2b = -1 \\ \hline a = 1 \end{array} \qquad b = -2$$

El polinomio buscado es $y = x^3 - 2x^2 + 2$

- CUESTIÓN 4.A. [2 PUNTOS]

De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace dos dianas de cada tres disparos y el otro consigue tres dianas de cada cuatro disparos. Si los dos disparan simultáneamente, calcular:

(a) La probabilidad de que los dos acierten.

(b) La probabilidad de que uno acierte y el otro no.

(c) La probabilidad de que ninguno de los dos acierte.

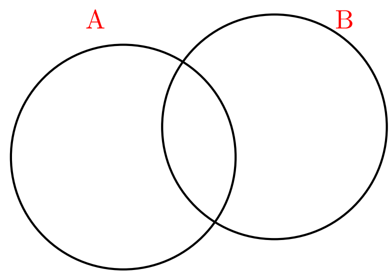
(d) La probabilidad de que alguno acierte.

selcs Jun 2006 Solución:

Consideramos los sucesos: A = acierta el primer tirador, $p(A) = \dfrac{2}{3}$; B = acierta el segundo tirador; $p(B) = \dfrac{3}{4}$. Los sucesos son independientes.

a) $p(\text{ los dos acierten }) = p(A \cap B) = p(A).p(B) = \dfrac{2}{3}.\dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}$

b) $p(\text{ acierte uno solo }) = p((A \cap B^c) \underbrace{\cup}_{disjunta} (A^c \cap B)) = p((A \cap B^c)) + p(A^c \cap B)) = p(A).p(B^c) + p(A^c).p(B) = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{12}$



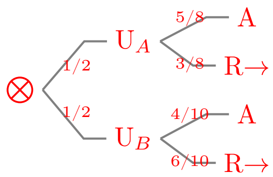
c) $p(\text{ ninguno acierte }) = p(A^c \cap B^c) = p(A^c).p(B^c) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

d) $p(\text{ alguno acierte }) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{12}$

- CUESTIÓN 4.B. [2 PUNTOS]

Tenemos una urna A con 3 bolas rojas y 5 azules y una urna B con 6 bolas rojas y 4 azules. Si sacamos de ellas una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja?

selcs Jun 2006 Solución:



Hay 8 bolas en la urna U_A y 10 bolas en la U_B. Como se elige una de las dos urnas al azar la probabilidad de cada una es $\frac{1}{2}$.

Sumando las dos ramas que terminan extrayendo bola roja: $p(R) = \frac{1}{2}.\frac{3}{8} + \frac{1}{2}.\frac{6}{10} = 0'48$

- CUESTIÓN 5.A. [1.5 PUNTOS]

  Un estudio realizado en el ámbito de la Unión Europea concluye que la edad de los propietarios de un automóvil ”Mercedes” en el momento de su adquisición tiene un comportamiento Normal con media 38 años y varianza 16. Un concesionario de dicha marca, instalado recientemente en España, ha vendido sólo 150 vehículos y ha comprobado que la edad media de sus clientes es de 38.3 años. Aceptando para los clientes españoles la varianza obtenida para los clientes europeos, ¿se puede aceptar que la edad media al adquirir un vehículo de esa marca es la misma en España que en Europa, para un nivel de significación del 5 %?

  selcs Jun 2006 Solución:

  Contrastamos $H_0 : \mu = 38$ años frente a $H_1 : \mu \neq 38$ años, consideramos test bilateral.

  Los datos son: $\bar{x} = 38'3, \sigma^2 = 16 \to \sigma = 4, n = 150$.

  El nivel de significación del 5 %, $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 38 \pm 1'96 \dfrac{4}{\sqrt{500}} = 38 \pm 0'65$ que da el intervalo $(37'35, 38'65)$.

  Como $\bar{x} = 38'3$ queda dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula de que $\mu = 38$ años.

  Se acepta que la edad media al adquirir un vehículo de esa marca es la misma en España que en Europa, para un nivel de significación del 5 %.

- CUESTIÓN 5.B. [1.5 PUNTOS]

  La media de las medidas de los diámetros de una muestra aleatoria de 200 bolas de rodamiento fabricadas por cierta máquina fue de 0.824 cm. Y la desviación típica fue de 0.042 cm. Hallar los límites de confianza al 95 % para el diámetro medio de las bolas fabricadas por esa máquina.

  selcs Jun 2006 Solución:

  Los datos son: $\bar{x} = 0'824, \sigma = 0'042, n = 200$.

  Para el nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0'824 \pm 1'96 \cdot \dfrac{0'042}{\sqrt{200}} = 0'824 \pm 0'038 \begin{cases} 0'8182 \\ 0'8297 \end{cases}$