Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia)

Año 2010

Septiembre 2010

- CUESTIÓN A.1 En una empresa se producen dos tipos de artículos A y B, en cuya elaboración intervienen tres departamentos: cortado, montaje y embalado. Cada departamento trabaja 8 horas al día y mientras el producto A requiere sólo una hora de montaje y media de embalado, el producto B requiere dos horas de cortado y una de embalado. El beneficio que se obtiene por cada unidad de A es de 40 euros y por cada unidad de B de 35 euros. ¿Cómo debe distribuirse la producción diaria para maximizar el beneficio?

  selcs Sep 2010 Solución:

  Sean:
  $x =$ número de artículos A
  $y =$ número de artículos B
  Ganancia: $f(x, y) = 40x + 35y$ euros

  $$\left.\begin{array}{ll} \text{cortado} & 2y \leq 8 \\ \text{montaje} & x \leq 8 \\ \text{embalado} & \frac{1}{2}x + y \leq 8 \end{array}\right\}$$

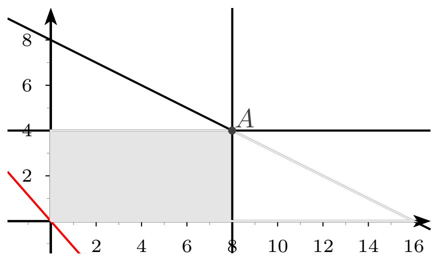
  Representamos: $\dfrac{1}{2}x + y \leq 8$

x	0	16
y	8	0

  Ahora la función igualada a 0:

  $f(xy) = 40x + 35y = 0$

x	0	-7
y	0	8



  Para maximizar los ingresos tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ que pasa por el punto A que sería la más alejada: comprobemos los valores correspondientes a esos puntos:

  $A(8, 4)$; $f(8, 4) = 40 \cdot 8 + 35 \cdot 4 = 460$

  Por tanto el máximo beneficio resulta de fabricar 8 artículos A y fabricar 4 artículos B.

- CUESTIÓN A.2 Dada la curva de ecuación: $y = \dfrac{3x^2 - 5x - 6}{x^2 - x - 2}$ calcular:

  a) Dominio

  b) Asíntotas

  selcs Sep 2010 Solución:

a) Dominio: Anulamos el denominador:

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

Por tanto: Dominio $= R - \{-1, 2\}$

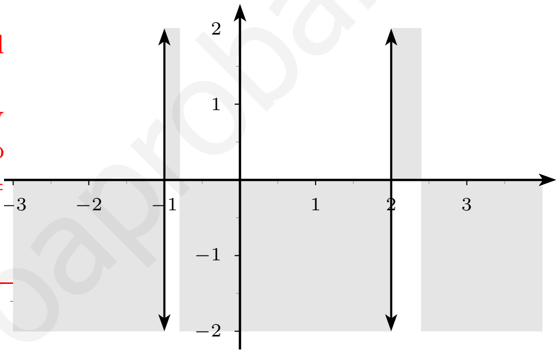
b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

- verticales valores de x en los que la función se va a infinito:
  Asíntotas verticales, valores de x que anulan al denominador: $x = -1, x = 2$. Pero hemos de comprobar que el numerador no tiene alguna raíz común: $3x^2 - 5x - 6 = 0 \quad \begin{matrix} x_1 = \frac{5-\sqrt{97}}{6} = -0'808 \\ x_2 = \frac{5+\sqrt{97}}{6} = 2'47 \end{matrix}$

  Por tanto son asíntotas verticales $x = -1, x = 2$.
- Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 5x - 6}{x^2 - x - 2} = 3$
  Luego la asíntota horizontal es $y = 3$

Con el regionamiento podemos saber el lado por el que la curva se acerca a la asíntota:
Para ello consideramos las raíces del numerador y denominador: resulta que delimitan región de cambio de signo de y : $\quad x = -1, x = -0'808, x = 2, x = 2'47$

x		-1		$-0'808$		2		$2'47$	
y	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$



- CUESTIÓN A.3 Calcular el área comprendida entre la curva $y = x^2 - 6x + 10$, el eje OX y las rectas $x = 3$ y $y = -2x + 10$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

  selcs Sep 2010 Solución:

  Buscamos los puntos de corte de las dos funciones:
  $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 10 \\ y = -2x + 10 \end{cases}$
  $x^2 - 6x + 10 = -2x + 10; \quad x^2 - 4x = 0; \quad x = 0, x = 4$

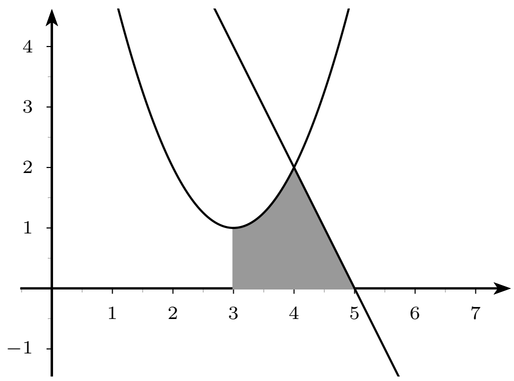
  Área$= \displaystyle\int_3^4$ parábola $+$ Triángulo

  $$\int_3^4 (x^2 - 6x + 10) \quad dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 10x\right]_3^4 = \frac{4}{3}u^2$$

  La altura del triángulo es la ordenada del punto de corte correspondiente a $x = 4$, sustituyendo en la recta $y = -2 \cdot 4 + 10 = 2$

  triángulo: $S = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{1 \cdot 2}{2} = 1$

  Área $= \dfrac{4}{3} + 1 = \dfrac{7}{3}$ u^2



- CUESTIÓN A.4 Una fábrica de jabón recibe de tres proveedores A, B y C agua destilada en botellas en la proporción 80 %, 15 % y 5 % respectivamente. El control de calidad de la fábrica estima que debido a la mayor o menor impureza del agua deja pasar los tipos A, B y C con una probabilidad de 1, 0.4 y 0.03 respectivamente. ¿Qué probabilidad hay de que el control de calidad deje pasar una botella cualquiera?

  selcs Sep 2010 Solución:

Teorema de la probabilidad total:

Sea A el suceso botella que proviene de A: ”botella de tipo A”, $p(A) = 0'80$

Sea B el suceso botella que proviene de B:”botella de tipo B”, $p(B) = 0'15$

Sea C el suceso botella que proviene de C:”botella de tipo C”, $p(C) = 0'05$

$\{A, B, C\}$ forman sistema completo de sucesos.

Sea D el suceso ”pasar el control de calidad”

$p(D) = p(D/A) \cdot p(A) + p(D/B) \cdot p(B) + (D/C) \cdot p(C) = 1 \cdot 0'80 + 0'4 \cdot 0'15 + 0'03 \cdot 0'05 = 0'8615$

- CUESTIÓN A.5 Se sabe que el precio de los libros de bachiller es una variable aleatoria normal con media 38.2 euros y desviación típica de 5.25 euros. Una muestra aleatoria simple de 16 libros de Química de distintas editoriales tiene un precio medio de 42.3 euros. Se quiere decidir si existe diferencia significativa entre la media del precio de los libros de Química y la media del precio de los libros de bachiller en general con un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$.

  selcs Sep 2010 Solución:

  Contrastamos $H_0 : \mu = 38'2$ frente a $H_1 : \mu \neq 38'2$,

  La desviación típica es $\sigma = 5'25$

  El nivel de significación $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 38'2 \pm 1'96 \dfrac{5'25}{\sqrt{16}} = 38'2 \pm 0'3726 = \begin{cases} 40'7725 \\ 35'6275 \end{cases}$

  que da el intervalo $(35'6275, 40'7725)$.

  Como $\bar{x} = 42'3$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 38'2$ € , cabe pensar que hay una diferencia significativa entre el precio medio de los libros de Química y el de los libros de bachiller en general.

- CUESTIÓN B.1 Calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

  selcs Sep 2010 Solución:

  Ejercicio ya propuesto en junio 2007 cuestión 1.A

- CUESTIÓN B.2 ¿Cuál es el número que al sumarlo con 25 veces su inverso se obtiene un valor mínimo?

  selcs Sep 2010 Solución:

  Sea x el número

  La función a minimizar es: $S(x) = x + 25 \cdot \dfrac{1}{x}$ mínimo

  Derivamos: $S'(x) = 1 - \dfrac{25}{x^2} = \dfrac{x^2 - 25}{x^2}$

  Anulamos la derivada: $\dfrac{x^2 - 25}{x^2} = 0; \quad x^2 - 25 = 0; \quad x = \pm 5$

  La solución es $x = 5$ comprobemos que es mínimo viendo el crecimiento:

x		5	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$
		MÍNIMO	

- CUESTIÓN B.3 Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = 4x - x^2$ e $y = x$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

  selcs Sep 2010 Solución:

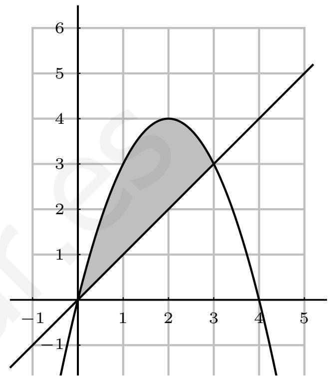
  Al ser una parábola para representar hallamos los puntos de corte con OX se hace $y = 0$ y resulta: $4x - x^2 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

  Los puntos de corte entre la recta y la parábola son:

  $4x - x^2 = 0 \quad \begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = x \end{cases} \qquad 4x - x^2 = x; \quad 3x - x^2 = 0; \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

  $$S = \int_0^3 \text{parábola} - \text{recta} \; = \int_0^3 3x - x^2 dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{9}{2} = 4'5u^2$$

  El área total encerrada es por tanto $4'5u^2$



- CUESTIÓN B.4 Una comisión delegada de cierto ayuntamiento está formado por 10 concejales de los cuáles 5 pertenecen al partido A, 4 al B y 1 al C. Se eligen 3 personas al azar y sucesivamente de dicha comisión.

  a) Calcular la probabilidad de que las tres pertenezcan al partido A.

  b) Calcular la probabilidad de que las tres pertenezcan al partido C.

  selcs Sep 2010 Solución:

  Sucesivamente sin devolución: entonces las probabilidades varían en las sucesivas elecciones: La probabilidades de los sucesos que pide son:

  a) $p($ "tres del partido A" $) = \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{12}$

  b) $p($ "tres del partido C" $)$ es suceso imposible, luego su probabilidad es 0.

- CUESTIÓN B.5 Se está observando la asistencia anual a congresos de los profesionales de la medicina. Se sabe que la variable aleatoria es normal con desviación típica igual a 4 veces por año. Se toma una muestra de 70 profesionales de la medicina cuya asistencia media es de 3 veces por año. Dar un intervalo de confianza al 98 % para la media de la asistencia anual a congresos de todos los profesionales de medicina.

  selcs Sep 2010 Solución:

  Los datos son: $\bar{x} = 3, \sigma = 4, n = 70$.

  El nivel de confianza es 98 %, como no es usual, tenemos que buscar en las tablas de la normal el valor crítico que corresponde. Para el 98 %, corresponde buscar en las tablas una probabilidad 0'9900, el valor que más se aproxima es 2'33: $p(X \leq x_0) = 0'9900, \quad x_0 = 2'33$

  El valor crítico es por tanto $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'33$.

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} =$

  $3 \pm 2'33 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{70}} = 3 \pm 1'1139 \begin{cases} 1{,}8861 \\ 4'1139 \end{cases}$

  El intervalo de confianza para la media de asistencias anuales a congresos es $(1{,}8861, 4'1139)$