

Junio 2013

- CUESTION A1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 3 & c & 1 \end{pmatrix},$$

- Hallar a, b y c para que se cumpla que $A \cdot B = C^t$. (C^t denota la traspuesta de C)
- Para $a = 0$ calcular la inversa de A .

selcs Jun 2013 Solución:

$$\text{a) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & b+2 \\ -5 & 2 \\ 2a-1 & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resulta igualando elementos $b+2=3$; $2=c$; $2a-1=1$; $a \cdot b=1$, en definitiva $a=1, b=1, c=2$

$$\text{b) } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} 1^a + 3^a \cdot (-5) \\ 2^a + 3^a \cdot (-6) \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) 1^{a-2^a} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

no hace falta dividir cada fila por su elemento de la diagonal principal por ser 1:

las últimas tres columnas es la matriz inversa.

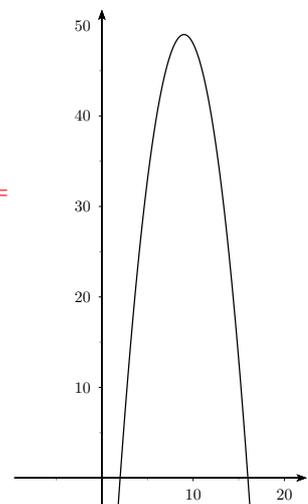
- CUESTION A2. Las funciones $I(t) = -0'5t^2 + 17t$ y $C(t) = 0'5t^2 - t + 32$ con $0 \leq t \leq 18$ representan, respectivamente, los ingresos y los costes de una empresa en miles de euros en función de los años transcurridos desde su comienzo y en los últimos 18 años.
 - ¿Para que valores de t , desde su inicio, los ingresos coincidieron con los costes?
 - Hallar la función que expresa los beneficios (ingresos menos costes) en función de t y representarla gráficamente.
 - ¿Cuántos años después del comienzo de su actividad la empresa alcanzó el beneficio máximo? Calcular el valor de dicho beneficio.

selcs Jun 2013 Solución:

$$\text{a) Igualando } I(t) = C(t); \quad -0'5t^2 + 17t = 0'5t^2 - t + 32; \quad t^2 - 18t + 32 = 0; \quad t = 2, t = 16$$

$$\text{b) } B(t) = I(t) - C(t) = -t^2 + 18t - 32$$

$$\text{c) Es en el vértice de la parábola } B'(t) = -2t + 18 = 0, \quad t = 9, \quad B(9) = 49$$



- CUESTION A3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{x^3+2x}$ b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

selcs Jun 2013 Solución:

a) $f'(x) = (3x^2 + 2)e^{x^3+2x}$

b) $g'(x) = \left((2x-1)^{-\frac{1}{2}} \right)' = -\frac{1}{2} (2x-1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 = -\frac{1}{\sqrt{(2x-1)^3}}$

- CUESTION A4. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0'2$, $P(B) = 0'5$ y $P(A \cup B) = 0'65$.

a) ¿Son independientes ambos sucesos? Razonar la respuesta.

b) Calcular $P(A/B)$.

selcs Jun 2013 Solución:

a) Hallamos la probabilidad de la intersección: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; $0'65 = 0'2 + 0'5 - P(A \cap B)$ resulta $P(A \cap B) = 0'05$, como es distinta de $P(A) \cdot P(B) = 0'2 \cdot 0'5 = 0'1$ podemos afirmar que A y B son dependientes.

b) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0'05}{0'5} = 0'1$

- CUESTION A5. Según un estudio realizado en el año 2000, en una población la proporción de personas que tenía sobrepeso era del 24%. En los últimos años ha disminuido la actividad física que realizan los individuos, lo que hace sospechar que dicha proporción ha aumentado. Para contrastarlo, se ha tomado recientemente una muestra aleatoria de 1195 individuos, de los cuales 310 tienen sobrepeso. Con un nivel de significación del 1%, ¿se puede rechazar que la proporción sigue siendo del 24% e inclinarnos por que dicha proporción ha aumentado?

selcs Jun 2013 Solución:

Contraste de hipótesis unilateral para la proporción:

$H_0 : p = 0'24$ se acepta que se mantiene la proporción.

$H_1 : p > 0'24$ cabe pensar que la proporción ha subido.



Para el nivel de significación 0'01, ese área a la derecha bajo la normal corresponde con $z_\alpha = 2'33$.

La región de aceptación tiene como extremo:

$$p + z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0'24 + 2'33 \sqrt{\frac{0'24 \cdot 0'76}{1195}} = 0'2688$$

Luego la región de aceptación es el intervalo $(-\infty, 0'2688)$.

Como la proporción de la muestra $\hat{p} = \frac{310}{1195} = 0,2594$ está dentro del intervalo de aceptación se acepta H_0

Luego los resultados muestrales llevan a mantener que no ha aumentado el sobrepeso.

- CUESTION B1. Una pastelería dispone de 100 kg de masa, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de nata. Con estos ingredientes elabora dos tipos de tartas: la tarta de chocolate, que requiere para su elaboración 1 kg de masa y 2 kg de crema de chocolate, y la tarta de chocolate y nata, que requiere 2 kg de masa, 1 kg de crema de chocolate y 1 kg de nata. Por cada tarta de chocolate se obtiene un beneficio de 10 euros, y de 12 euros por cada

una de chocolate y nata. Suponiendo que vende todas las tartas, ¿cuántas tartas de cada tipo debe preparar para maximizar su beneficio?, ¿cual es el beneficio máximo?

selcs Jun 2013 Solución:

Sean:

x = número de tartas de chocolate

y = número de tartas de nata y chocolate

Ganancia: $f(x, y) = 10x + 12y$ euros

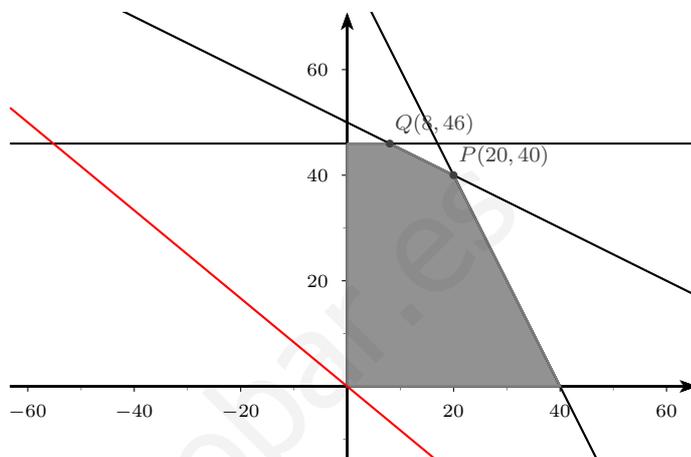
$$\left. \begin{array}{l} \text{masa} \quad x + 2y \leq 100 \\ \text{chocolate} \quad 2x + y \leq 80 \\ \text{nata} \quad y \leq 46 \end{array} \right\}$$

Representamos: $x + 2y \leq 100$ $\frac{x}{y} \left| \begin{array}{cc} 0 & 100 \\ 50 & 0 \end{array} \right.$

$2x + y \leq 80$ $\frac{x}{y} \left| \begin{array}{cc} 0 & 40 \\ 80 & 0 \end{array} \right.$

Ahora la función igualada a 0:

$f(xy) = 10x + 12y = 0$ $\frac{x}{y} \left| \begin{array}{cc} 0 & -60 \\ 0 & 50 \end{array} \right.$



Para maximizar los ingresos tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ más alejada, la que pasa por el punto

P , hallamos sus coordenadas: $\begin{cases} x + 2y = 100 \\ 2x + y = 80 \end{cases} \quad x = 20, y = 40.$

$P(20, 40)$; $f(20, 40) = 10 \cdot 20 + 12 \cdot 40 = 680$

Por tanto el máximo beneficio resulta de hacer 20 tartas de chocolate y 40 de chocolate y nata, obteniendo así 680 € por la venta.

- CUESTION B2. Dada la función $f(x) = x^4 + ax + b$, hallar a y b sabiendo que en $x = 1$ la función tiene un extremo relativo (un máximo o un mínimo relativo) y que $f(1) = 2$. ¿Se trata de un máximo o de un mínimo relativo?

selcs Jun 2013 Solución:

Como tiene un extremo relativo en $x = 1$ se tiene que $f'(1) = 0$; $f'(x) = 4x^3 + a$; $f'(1) = 4 + a = 0$; $a = -4$

Además $f(1) = 2$; $1 - 4 + b = 2$; $b = 5$ luego la función es $f(x) = x^4 - 4x + 5$

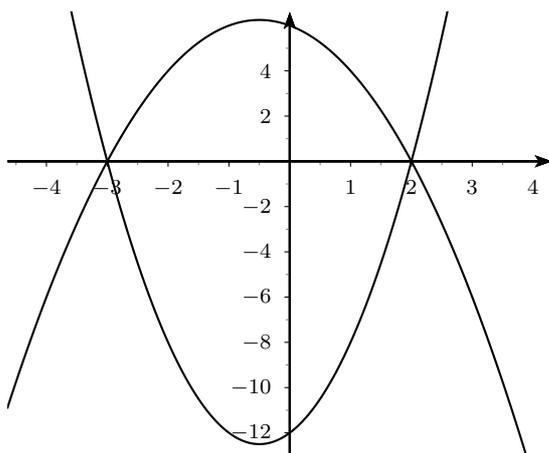
Para ver si es máximo o mínimo hacemos estudiamos el crecimiento: $f'(x) = 4x^3 - 4 = 0$; $x^3 = 1$; $x =$

x		1	
y'	-		+
1,	y	\searrow	\nearrow

MÍNIMO

O también por el criterio de la segunda derivada $f''(x) = 4x^3$; $f''(1) = 4 > 0$ es un mínimo.

- CUESTION B3. Dadas las parábolas $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$ y $g(x) = -x^2 - x + 6$ cuyas gráficas se presentan a continuación, hallar el area de recinto acotado encerrado entre ambas.



selcs Jun 2013 Solución:

El área viene dada por la integral de la mayor menos la menor en el intervalo de integración:

$$S = \int_{-3}^2 g - f = \int_{-3}^2 (-3x^2 - 3x + 18) dx = \left[-x^3 - \frac{3x^2}{2} + 18x \right]_{-3}^2 =$$

$$-8 - 6 + 36 - \left(27 - \frac{27}{2} - 54 \right) = 62\frac{1}{2} \text{ u}^2$$

- CUESTION B4. En una clase hay 15 chicos y 15 chicas que van a realizar el siguiente experimento aleatorio: se tiene una caja azul con 10 bolas numeradas de 1 a 10 y una caja verde con 5 bolas numeradas de 1 a 5, se elige al azar una persona de la clase, si es una chica, extrae una bola de la caja azul, y si es un chico, extrae una bola de la caja verde.
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer un número par?
 - b) Si el número extraído ha sido par, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraído por una chica?

selcs Jun 2013 Solución:

Consideramos los sucesos M ser chica, V ser chico, P ser par y I ser impar

M, V es sistema completo de sucesos, como hay 15 de cada $p(M) = p(V) = \frac{1}{2}$

a) Por el Teorema de la probabilidad total:

$$p(P) = p(M) \cdot p(P/M) + p(V) \cdot p(P/V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$$

b) Por el teorema de Bayes:

$$p(M/P) = \frac{p(P/M) \cdot p(M)}{p(M) \cdot p(P/M) + p(V) \cdot p(P/V)} = \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{9}{20}} = \frac{5}{9}$$

- CUESTION B5. El tiempo de espera para ser atendido en la caja de un establecimiento sigue una distribución normal de desviación típica 5 minutos. Calcular el tamaño mínimo de la muestra para estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el tiempo medio de espera con un error que no sea superior a medio minuto. ¿Cuál es dicho tamaño mínimo para un nivel de confianza del 99 %?

selcs Jun 2013 Solución:

$$\text{error} = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

El error de la estima viene dado para el nivel de confianza del 95 % por $1'96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si se quiere sea menor de 0'5 entonces $1'96 \frac{5}{\sqrt{n}} \leq 0'5$

Despejamos n , $1'96 \frac{5}{\sqrt{n}} = 0'5$, $\sqrt{n} = \frac{1'96 \cdot 5}{0'5} = 19'6$ $n \geq 384'16$.

Así, pues, se tiene la confianza del 95 % de que el error de la estima será menor de 0'5 solamente si n es 385 o mayor.

Análogamente el error de la estima viene dado para el nivel de confianza del 99 % por $2'58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si se quiere sea menor de 0'5 entonces $2'58 \frac{5}{\sqrt{n}} \leq 0'5$; $n > 665,64$

Se tiene la confianza del 99 % de que el error de la estima será menor de 0'5 solamente si n es 666 o mayor.