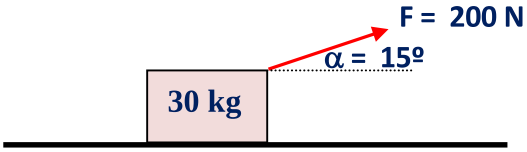
1) ¿Cuánta energía consume una placa de inducción, o de vitrocerámica, a potencia de 2kW durante 25 minutos? ¿Cuál es el coste de ese uso a 0,1406€/kWh?

P = W/t y como el trabajo W es la energía E consumida ⇨ W = E = P×t = 2000×(25x60) = $\mathbf{3\times10^6}$ **J**
Coste: 2kW en 25 min (25/60 = 0,4167 h) serán: kW×h×(€/kWh) = 2x0,4167x0,1406 = **0,1172 €**

2) Calcula el trabajo realizado por la fuerza F de la figura al recorrer 5m. ¿Qué velocidad adquirió la masa partiendo del reposo?



W = Fdcosα = 200x5xcos15 = **W = 966 J** Para determinar la velocidad aplicamos:

$\sum W = Em_f - Em_i$ ⇨ $966 = (Ec + Ep)_f - (Ec + Ep)_i = (1/2mv^2 + 0)_f - (0 + 0)_i$ ⇨ $966 = 1/2x30v^2$ ⇨ **v = 8,02 m/s**

3) Una bomba eléctrica es capaz de elevar 200 litros de agua a una altura de 15 metros en 30 segundos. Calcula la potencia de la bomba.

200 l de agua = 200 kg ya que su densidad es 1000 kg/m^3 = 1kg/l
P = W/t = Fdcosα/t = mghcos0º/t = 200x10x15/30 = **1000 W**

4) A nivel del suelo se lanza horizontalmente un cuerpo de masa 5 kg con una velocidad de 12 m/s. Si ha de recorrer 8 m en terreno horizontal con μ = 0,2, calcular la altura a la que llegará hasta pararse si a continuación de los 8 m del terreno con rozamiento subirá por una pendiente sin rozamiento.

Sale con una energía cinética que, en parte, se perderá por el rozamiento y la sobrante será para subir por la pendiente. Aplicamos la ecuación fundamental de conservación de la energía mecánica incluyendo trabajo externo:

$\sum W = Em_f - Em_i$ ⇨ $Wf_r = (Ec + Ep)_f - (Ec + Ep)_i$ ⇨ $F_r d\cos\alpha = (0 + mgh)_f - (½\, mv^2 + 0)_i$ ⇨ **-**μNx8 = 5x10xh - ½ 5x12^2 ⇨

-0,2x(5x10)x8 = 50h - 360 ⇨ **h = 5,6 m**

Observar que el W_{Fr} sale con signo negativo ya que el ángulo entre Fr y el desplazamiento es de 180^0 y cos180 = -1

5) Una bomba saca agua de un pozo de 8 m de profundidad a razón de 75 litros por minuto con velocidad constante. Determina: a) el trabajo efectuado por la bomba en dos horas. b) La potencia de la bomba expresada en CV.

El trabajo realizado en dos horas corresponde a elevar un volumen de 75x(60x2) = 9000 litros en dos horas = 9000 kg en dos horas
W = Fdcosα = mgdcosα = 9000x10x8cos0^0 =**720000 J**
Y la potencia será P = W/t = 720000/(2x3600) = 100 w ⇨ Como 1 CV = 735W ⇨ P = 100/735 = **0,14 CV**

6) Un coche de 1000 kg partiendo del reposo sube por una rampa, alcanzando en 8 s una velocidad de 20 m/s tras subir una altura de 15 m. a) ¿Qué trabajo realizó el motor? b) ¿Cuál fue la potencia desarrollada por el motor? c) ¿Qué distancia recorrió en la pendiente?

a) $\sum W = Em_f - Em_i$ ⇨ $W_{motor} = (Ec + Ep)_f - (Ec + Ep)_i$ ⇨ $W_{motor} = (1/2mv^2 + mgh)_f - (0 + 0)_i$ ⇨

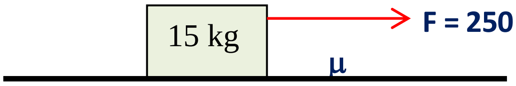
W_{motor} = 1/2x1000x20^2 + 1000x10x15 = **350000 J**

b) P = W/t = 350000/8 = **43750 W**

c) W = Fdcosα = 350000. En nuestro caso el ángulo entre la fuerza motor y el desplazamiento es de 0º pero nos falta el valor de F, que podemos obtener aplicando F = ma, pero ahora nos falta "a" que podemos calcular con v = v_a + at ⇨

20 = 0 + ax8 ⇨ a = 2,5 m/s^2 Por tanto W = Fdcosα = 350000 = maxd = 1000x2,5xd ⇨ **d = 140 m**

7) Partiendo del reposo la masa de 15 kg adquiere una velocidad de 5 m/s en tras recorrer 1,2m. A) Determina el trabajo de la fuerza F y el trabajo de la fuerza de rozamiento en ese tiempo. B) Determina el valor de μ



Al haber fuerzas externas aplicamos $\sum W = \Delta Em = Em_f - Em_i \Rightarrow W_F + W_{Fr} = (Ec + Ep)_f - (Ec + Ep)_i \Rightarrow$

$Fd\cos\alpha + F_r d\cos\alpha' = (\frac{1}{2} mv^2 + 0)_f - (0 + 0)_i \Rightarrow$ teniendo en cuenta que $\alpha = 0º$ y $\alpha' = 180º \Rightarrow$

$250x1,2 - F_r 1,2 = (\frac{1}{2}15x5^2 + 0)_f \Rightarrow 300 - 1,2F_r = 187,5 \Rightarrow F_r = 93,75$

El trabajo de Fr será por tanto $W_{Fr} = F_r d\cos\alpha = 93,75x1,2x(-1) =$ **-112,5 J** y el de F será $W = Fd\cos\alpha = 250x1,2x1 =$ **300 J**

Para determinar μ aplicamos: $F_r = \mu N \Rightarrow 93,75 = \mu(15x10) \Rightarrow$ **μ = 0,625**

8) Un resorte cuya constante de elasticidad es 2500 N/m se comprime 0,2 m horizontalmente sobre un terreno llano y se le coloca una masa de 0,5 Kg. Después de liberar el resorte la masa se detiene después de recorrer 12 metros. A) ¿Qué trabajo realizó la fuerza de rozamiento? B) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento entre terreno y masa? C) ¿Con qué velocidad se desprendió la masa del resorte si en ese tramo del resorte no hay rozamiento?

a) Al haber trabajos de fuerzas externas (en este caso del rozamiento): $\sum W = \Delta Em = Em_f - Em_i \Rightarrow$ y teniendo en cuenta que que no hay energía potencial gravitatoria (al estar en terreno llano):

$Wf_r = (Ec + Ep_e)_f - (Ec + Ep_e)_i \Rightarrow Wf_r = (\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} K\Delta x^2)_f - (\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} K\Delta x^2)_i \Rightarrow$

$Wf_r = (0 + 0)_f - (0 + \frac{1}{2} 2500 x 0,2^2)_i \Rightarrow$ **Wf_r = - 50 J** (negativo al ser un trabajo resistente)

b) Para calcular el coeficiente de rozamiento tenemos que calcular la Fr a partir del trabajo realizado por ella:

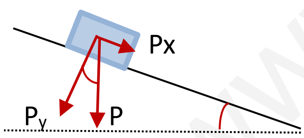
$W_{fr} = F_r d \cos\alpha \Rightarrow -50 = F_r x12\cos180 \Rightarrow -50 = -12F_r \Rightarrow F_r = 4,17$ N; $F_r = \mu N \Rightarrow 4,17 = \mu(0,5x10) \Rightarrow$ **μ = 0,834**

c) Para obtener la velocidad con que sale la masa del resorte aplicamos la conservación de la energía sin aportación de trabajo de fuerzas externas (no hay rozamiento en la zona del resorte): $(Ec + Ep)_f = (Ec + Ep)_i$ donde en este caso la Ep es $Ep_e = \frac{1}{2} K\Delta x^2$

$(Ec + Ep)_f = (Ec + Ep)_i \Rightarrow (\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} K\Delta x^2)_f = (\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} K\Delta x^2)_i \Rightarrow \frac{1}{2} 0,5xV^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2} 2500x0,2^2 \Rightarrow$ **V = 14,14 m/s**

9) Desde una pendiente de 30º y a una altura de 4 m se empuja hacia abajo un cuerpo de masa 12kg con una velocidad de 5 m/s. Calcular la velocidad con que llega al suelo sabiendo que μ = 0,3.

m = 12kg v= 5m/s h = 4m



$P_x = P\text{sen}30 = 12x10\text{sen}30 = 60$ N

$P_y = 12x10\cos30 = 104$ N

$F_r = \mu N = 0,3Py = 0,3x104 = 31,2$ N

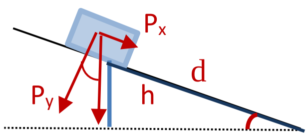
El recorrido en la bajada es: $\text{sen}\alpha = h/d \Rightarrow d = h/\text{sen}\alpha = 4/0,5 = 8$ m

$\sum W = Em_f - Em_i \Rightarrow Wf_r = (Ec + Ep)_f - (Ec + Ep)_i \Rightarrow F_r d\cos\alpha = (\frac{1}{2} mv^2 + mgh)_f - (\frac{1}{2} mv^2 + mgh)_i$

Por tanto: $F_r d\cos\alpha = (\frac{1}{2} mv^2 + mgh)_f - (\frac{1}{2} mv^2 + mgh)_i \Rightarrow 31,2\cdot 8\cdot \cos180 = \frac{1}{2} 12v^2 - (\frac{1}{2} 12\cdot 5^2 - 12\cdot 10\cdot 4) \Rightarrow$

$-249,6 = 6v^2 - 150 - 480 \Rightarrow$ **v = 7,96 m/s**

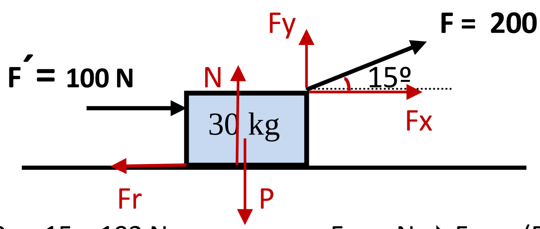
NOTA: En este tipo de ejercicios siempre surge la pregunta ¿por qué no se pone el trabajo de Px? La respuesta es que el trabajo de la componente P_x ya está incluido, ya que es la variación de energía potencial. Veamos la explicación:



En el punto de altura h tenemos $Ep = m\cdot g\cdot h$, y como $h = d\cdot \text{sen}\alpha$, si lo sustituimos tenemos: $Ep = m\cdot g\cdot d\cdot \text{sen}\,\alpha = (m\cdot g\cdot \text{sen}\alpha)\cdot d = (P\cdot \text{sen}\alpha)\cdot d = P_x d$ que es el trabajo realizado por el peso (componente P_x), es decir, si lo incluimos estamos utilizando dos veces la Ep.

También podríamos resolverlo aplicando dinámica (pero no es el tema que estamos trabajando):
$\sum F = ma$ ⇨ $Px - Fr = ma$ ⇨ $60 - 31,2 = 12a$ ⇨ $a = 2,4\ m/s^2$
y ahora aplicamos $v^2 = v_0^2 + 2ad$ ⇨ $v^2 = 5^2 + 2x2,4x8$ ⇨ $V = 7,96\ m/s$
Puede parecer mucho más corto, pero estamos utilizando datos calculados en la resolución anterior.

10) Calcula el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento y por la fuerza F de la figura durante un recorrido de 5m con coeficiente de rozamiento 0,2. ¿Qué energía cinética adquirió la masa en ese recorrido?



Los datos son los que figuran en negro. Lo dibujado en rojo forma parte de la resolución del ejercicio.

En primer lugar: $Fx = 200\cos 15 = 193$ N
$Fy = 200\text{sen}15 = 52$ N

$Fr = \mu N$ ⇨ $Fr = \mu(P - Fy) = 0,2(200 - 52)$ ⇨ $Fr = 29,6$ N

$\sum W = Em_f - Em_i$ ⇨ $W_{F100} + W_{F200} + W_{Fr} = (Ec + Ep)_f - (Ec + Ep)_i$ pero las Ep son cero y la Ec inicial también es cero:

$$F_{100}d\cos\alpha + F_{200}d\cos\alpha + F_r d\cos\alpha = Ec_{final}$$

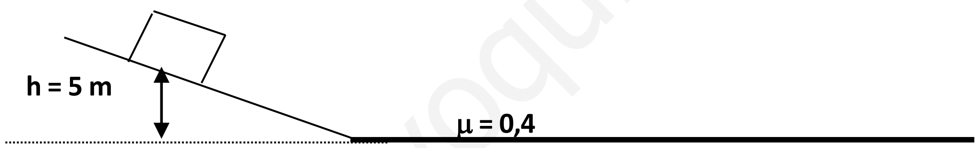
Hay que tener en cuenta que para F_{200} podemos usar F = 200 y ángulo 15º o bien Fx = 193 (ya calculado) y ángulo 0º:

$100\cdot 5\cdot \cos 0 + 200\cdot 5\cdot \cos 15 + 29,6\cdot 5\cdot \cos 180 = Ec =$ **500** + **966** – 148 = **1318 J = Ec**

W_{F100} = **500 J** W_{F200} = **966 J**

11) Un cuerpo resbala por una pendiente (sin rozamiento) y presenta en un momento dado los datos que se muestran en la figura adjunta. Calcula los metros que recorre en la zona llana hasta que se para, sabiendo que en esta zona $\mu = 0,4$

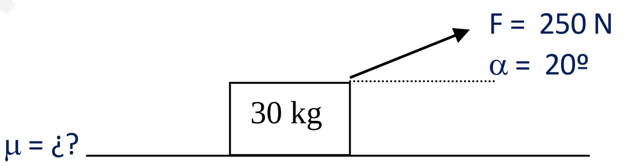
Masa = 2 kg V= 4 m/s

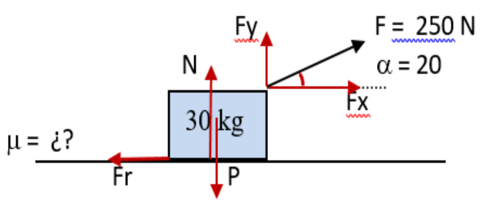


$\sum W = Em_f - Em_i$ ⇨ $W_{Fr} = (Ec + Ep)_f - (Ec + Ep)_i$ ⇨ $F_r d\cos\alpha = (0 + 0)_f - (\frac{1}{2} mv^2 + mgh)_i$ ⇨ $\mu N d\cos 180 = -\frac{1}{2}\, 2\times 4^2 - 2x10x5$

⇨ $- 0,4xdx(2x10) = - 16 - 100$ ⇨ **d = 14,5 m**

12) Partiendo del reposo la masa de 30 kg adquiere una velocidad de 15m/s en 10 segundos. A) Determina el valor de μ. B) Determina el trabajo de la fuerza F y el de la fuerza de rozamiento en ese tiempo.





$Fx = 250\cos 20 = 235$ N $Fy = 250\text{sen}20 = 85,5$ N

$Fr = \mu N = \mu(P - Fy) = \mu(30x10 - 85,5)$ ⇨ $Fr = 214,5\mu$

Veamos el espacio recorrido, pero para ello primero calculemos la aceleración: $v = v_0 + at$ ⇨ $15 = 0 + a10$ ⇨ $a = 1,5\ m/s^2$

Y ahora $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}1,5x10^2 = 75$ m

Ahora ya aplicamos $\sum W = Em_f - Em_i$ ⇨ $W_F + W_{Fr} = (Ec + Ep)_f - (Ec + Ep)_i$ ⇨

$250d\cos 20 + 214,5\mu d\cos 180 = (\frac{1}{2} mv^2 + 0)_f -$

$17619 - 16087,5\mu = 3375$ ⇨ **μ = 0,89**

13) Un avión de 70000 kg tiene una velocidad de despegue de 270 km/h. Si para ello emplea un recorrido en pista de 1950, determina la potencia aplicada por los motores.

v = 270km/h = (270 km/h).(1000 m/1 km)/(1 h/3600 s) = 75m/s

P = W/T

Y el trabajo realizado por los motores es para adquirir la velocidad necesaria (energía cinética)

$W=\Delta E_M \Rightarrow W = \Delta(E_c + E_p) = (Ec + Ep)_f - (Ec + Ep)_i$

Como hasta que empieza a despegar no hay cambio de altura.:$W = (E_{cf} - E_{ci})$

$W = E_f - 0$ (El avión parte del reposo)

$W = ½.m.v_2^2 = ½.70000x75^2 = 196.875.000$ J

Pero nos pide la potencia y para ello nos falta el tiempo, que podemos calcular con $v^2 = v_0^2 + 2.a.x$

$a = (v_2^2 - 0^2)/(2.x) = (75^2/(2.1950\ m)= 1,44\ m/s^2$

Ahora calculamos el tiempo: $v = v_0 + at \Rightarrow 75 = 0 + 1,44t \Rightarrow t = 52s$

Finalmente: W = W/t = 196.875.000/52 = **3.786.058 W**

14) Desde lo alto de un acantilado de 40 m de altura se tira verticalmente hacia abajo una piedra de 0,3 kg con una velocidad de 5 m/s. Determina: a) Altura a la que se encuentra cuando su velocidad es de 12 m/s. b) Velocidad al llegar al suelo. c) Ec a mitad de camino. d) Velocidad que lleva cuando la Ep es de 100 J.

No hay fuerzas externas, por tanto: $\sum W= 0 \rightarrow \sum W = Em_f - Em_i = 0 \rightarrow 0 = (Ec + Ep)_f - (Ec + Ep)_i \Rightarrow$

$(½\ mv^2 + mgh)_f - (½\ mv^2 + mgh)_i = 0$

a) $(½\ 0,3·12^2 + 0,3·10·h)_f - (½\ 0,3·5^2 + 0,3·10·40)_i = 0 \Rightarrow 21,6 + 3h - 3,75 - 120 = 0 \Rightarrow$ **h = 34,05 m**

b) $(½\ 0,3·V^2 + 0)_f - (½\ 0,3·5^2 + 0,3·10·40)_i = 0 \Rightarrow 0,15v^2 -3,75 - 120 = 0 \Rightarrow$ **v = 28,7 m/s**

c) (Ec + 0,3·10· (40/2)) – 3,75 – 120 = 0 ⇨ Ec + 60 – 3,75 – 120 = 0 ⇨ **Ec = 63,75 J**

d) $(½\ 0,3·V^2 + 100)_f - (½\ 0,3·5^2 + 0,3·10\times40)_i = 0 \Rightarrow 0,15v^2 + 100 -3,75 - 120 = 0 \Rightarrow$ **v = 12,6 m/s**

15) Un muelle de constante de elasticidad 7500 N/m se comprime 20 cm verticalmente y encima de él se le coloca una masa de 0,5 kg. ¿Qué altura alcanza si el aire ofrece una resistencia equivalente a 3 N ?¿Con qué velocidad salió del muelle?

Como hay fuerza externa (rozamiento del aire, con valor de $F_r = 3$ N)):

$\sum W = Em_f - Em_i \Rightarrow W_{Fr} = (Ec + Ep_g + Ep_e)_f - (Ec + Ep_e + Ep_g)_i \Rightarrow F_r d\cos\alpha = (0 + mgh +0)_f - (0 + 0 + ½\ kx^2)_i \Rightarrow$

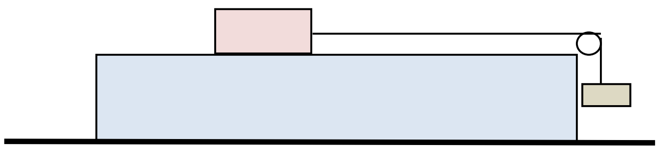
$3\times h\times\cos180 = 0,5\times10\times h - ½\ 7500\times0,2^2 \Rightarrow -3h = 5h - 150 \Rightarrow$ **h = 18,75 m**

Para ver la velocidad con que sale del muelle tenemos en cuenta que aún no hay influencia de la fuerza de rozamiento del aire y no ha ganado altura, por tanto:

$\sum W = 0 = (Ec + Ep_g + Ep_e)_f - (Ec + Ep_e + Ep_g)_i \Rightarrow 0 = (½\ mv^2 + 0 +0)_f - (0 + 0 + ½\ kx^2)_i \Rightarrow$

$½\ 0,5v^2 - ½\ 7500\times0,2^2 = 0 \Rightarrow 0,15v^2 - 150 = 0 \Rightarrow$ **v = 31,6 m/s**

16) Aplicando la conservación de energía, calcula la velocidad con que se mueven las masas cuando la pequeña ha bajado 0,5 m. DATOS: masa grande 3 kg, masa pequeña 2 kg. Altura al suelo de la masa pequeña 1,7 m. Coeficiente de rozamiento en la zona superior μ = 0,5.



Considerando todo como un sistema energético en el que actúa una fuerza externa (el rozamiento):

$\sum W = Em_f - Em_i \Rightarrow W_{Fr} = (Ec + Ep_g)_f - (Ec + Ep_e)_i \Rightarrow F_r d\cos\alpha = (\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} Mv^2 + mgh + Mgh')_f - (\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} Mv^2 + mgh + Mgh')_i \Rightarrow$

Hay que observar que los Mgh´ final e inicial se anulan (ya que están siempre a la misma altura) y que todas las velocidades son iguales al moverse simultáneamente. También el recorrido d de la masa superior es igual a lo que ha bajado la pequeña, es decir 0,5m (y la pequeña estará a una altura 1,7 – 0,5 = 1,2m)

$\mu N d\cos\alpha = (\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} Mv^2 + mgh)_f - (0 + 0 + mgh)_i \Rightarrow 0{,}5(3\cdot10)\cdot0{,}5\cos180 = \frac{1}{2} 2v^2 + \frac{1}{2} 3v^2 + 2\cdot10\cdot1{,}2 - 2\cdot10\cdot1{,}7 \Rightarrow$

$-7{,}5 = 2{,}5v^2 + 24 - 34 \Rightarrow$ **$v = 1$ m/s**

Si lo hubiéramos hecho por dinámica (que no es el tema que nos corresponde):
Aplicando al conjunto (dibuja tú las fuerzas) tendremos: $p - T + T - Fr = (m + M)a \Rightarrow 2\times10 - \mu N = (2 + 3)a \Rightarrow$
$20 - 0{,}5(3\times10) = 5a \Rightarrow a = 1$ m/s². Veamos la velocidad adquirida sabiendo que ha recorrido 0,5 m:
$v^2 = v_0^2 + 2ad \Rightarrow v^2 = 0 + 2\times1\times0{,}5 \Rightarrow v = 1$ m/s (Es más sencillo en este caso, pero en general la aplicación de la conservación de la energía es más sencilla e importante)

17) Un resorte cuya constante de elasticidad es 2500 N/m se comprime 0,1 m al borde de inicio de una rampa y se le coloca una masa de 0,5 Kg. Después de liberar el resorte la masa se detiene después de recorrer 4 metros por la rampa sin rozamiento. A) ¿Qué altura alcanzó? B) ¿Qué velocidad llevaba cuando había subido 1,5 m en altura?

Como no hay fuerzas externas: $Em_f - Em_i = 0 \Rightarrow (Ec + Ep_g + Ep_e)_f - (Ec + Ep_g + Ep_e)_i = 0 \Rightarrow$

a) $(0 + mgh + 0)_f - (0 + 0 + \frac{1}{2} kx^2)_i = 0 \Rightarrow 0{,}5\cdot10\cdot h - \frac{1}{2}\cdot2500\cdot0{,}1^2 = 0 \Rightarrow 5h = 12{,}5 \Rightarrow$ **$h = 2{,}5$ m**

b) $(\frac{1}{2} mv^2 + mgh + 0)_f - (0 + 0 + \frac{1}{2} kx^2)_i = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}0{,}5v^2 + 0{,}5\cdot10\cdot1{,}5 - \frac{1}{2}\cdot2500\cdot0{,}1^2 = 0 \Rightarrow 0{,}25v^2 + 7{,}5 = 12{,}5 \Rightarrow$ **$v = 4{,}47$ m/s**

18) Un automóvil de masa 655 kg entra en una pendiente con cierta velocidad poniendo inmediatamente el coche en punto muerto. Si la E_p del coche en el momento de pararse en lo alto de la rampa es 127.455 J, determinar:
a) Velocidad del coche al entrar en la pendiente. b) Altura que alcanzó. c) Altura a la que se encuentra cuando su energía cinética es 100.550 J.

Como no actúan fuerzas externas (ni motor ni rozamiento) tenemos que:

$\Delta E_M = 0 \quad \Delta(E_c + E_p) = (Ec + Ep)_f - (Ec + Ep)_i = 0 \Rightarrow (\frac{1}{2} mv^2 + mgh)_f - (\frac{1}{2} mv^2 + mgh)_i = 0 \Rightarrow$

a) $(0 + 127455)_f - (\frac{1}{2} 655v^2 + 0)_i = 0 \Rightarrow 127455 - 327{,}5v^2 = 0 \Rightarrow$ **$v = 19{,}7$ m/s**

b) La altura la da directamente la Ep que alcanzó: $Ep = mgh \Rightarrow 127455 = 655\times10\times h \Rightarrow$ **$h = 19{,}5$ m**

c) $(\frac{1}{2} mv^2 + mgh)_f - (\frac{1}{2} mv^2 + mgh)_i = 0 \Rightarrow (100.550 + 655\times10h) - (\frac{1}{2} 655\times19{,}7^2 + 0) = 0 \Rightarrow$

$100.550 + 655\times10h - 127099 = 0 \Rightarrow$ **$h = 4{,}05$ m**

19) Una grúa levanta 2000 kg a 12 m del suelo en 15 s, expresar la potencia empleada en CV:

$P = W/t = Fd\cos0^0/t = pd/t = (2000\times10)\times12/15 = 16000$ W $\Rightarrow 16000/735 =$ **21,8 CV**

20) Calcular la velocidad que alcanza un automóvil de 1500 kg en 16 s, partiendo del reposo, si tiene una potencia de 100 CV.

1 CV = 735 W $\Rightarrow$ 100 CV = 73.500 W
De la potencia obtenemos el trabajo empleado: $P = W/t \Rightarrow W = Pt = 73.500\times15 = 1.102.500$

$\sum W = \Delta E_M \Rightarrow W_{motor} = \Delta E_c = (\frac{1}{2} mv^2)_f - (\frac{1}{2} mv^2)_i \Rightarrow 1.102.500 = \frac{1}{2} 1500v^2 \Rightarrow$ **$v = 38{,}3$ m/s**

21) Un muelle de k =1000 N/m está comprimido verticalmente 0,15 m. Encima de él se coloca una masa de 50g. Cuando se suelte el muelle, calcular la velocidad que lleva a mitad de la altura que recorre verticalmente.

Como nos pide la velocidad a mitad de la altura, lo primero que hay que hacer es calcular la altura que alcanza, para determinar el valor esa mitad de altura.

Como no hay fuerzas externas: $Em_f - Em_i = 0$ ⇨ $(Ec + Ep_g + Ep_e)_f - (Ec + Ep_g + Ep_e)_i = 0$

En la altura máxima (v = 0) ⇨ $(0 + 0 + Ep_e)_f - (0 + Ep_g + 0)_i = 0$ ⇨ $½ kx^2 – mgh = 0$ ⇨ $½\ 1000·0,15^2 – 0,05·10·h = 0$ ⇨ h=22,5m.

Ahora reiniciamos el problema para calcular la velocidad que llevará a mitad de la altura (11,25m)

$(Ec + Ep_g + Ep_e)_f - (Ec + Ep_g + Ep_e)_i = 0$ ⇨ $(0 + 0 + Ep_e)_f - (½ mv^2 + Ep_g + 0)_i = 0$ ⇨ $½ kx^2 – (½ mv^2 + mgh) = 0$ ⇨

$½\ 1000·0,15^2 – (½\ 0,05v^2 + 0,05·10·11,25) = 0$ ⇨ $11,25 – (0,025v^2 + 5,625) = 0$ ⇨ **v = 15 m/s**

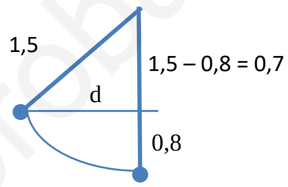
22) Sea un péndulo que está en su posición de equilibrio. Si el péndulo tiene una masa de 0,2 kg y una longitud 1,5 m y se le comunica un golpe con el que adquiere una velocidad de 4 m/s, determinar:
a) altura que alcanza respecto a su posición de equilibrio. b) longitud horizontal que le separa de su posición de equilibrio.

a) Como no hay fuerzas externas: $Em_f - Em_i = 0$ ⇨ $(Ec + Ep_g)_f - (Ec + Ep_g)_i = 0$ ⇨ $(½ mv^2 + 0) – (0 + mgh) = 0$ ⇨

$½\ 0,2·4^2 – 0,2·10·h = 0$ (el dato de la masa 0,2 kg sobra) ⇨ **h = 0,8 m**

b) Este apartado es un simple cálculo matemático:

Tenemos un triángulo rectángulo:
$1,5^2 = d^2 + 0,7^2$ **d = 1,33 m**



d

23) Una bala de masa 10 g se dispara horizontalmente sobre un taco de madera de masa 1,5 kg, que cuelga de un hilo, quedando empotrada en él. Tras el impacto el taco (con la bala incrustada) oscila, sufriendo un desplazamiento vertical de 15 cm. Calcular la velocidad que llevaba la bala en el momento del impacto.

Hay que tener cuidado con este ejercicio. Podríamos pensar que la energía cinética de la bala se transforma en la energía potencial que adquiere el taco con la bala incrustada a la altura de 0,15 m. Pero no es cierto. El choque de la bala con el taco de madera es un choque inelástico donde no se conserva la energía (*), pero sí la cantidad de movimiento (ver choque inelástico en el tema de Dinámica).
(*) La energía siempre se conserva, pero en el choque, parte de esa energía se transforma en calor y deformaciones que no se convierten en energía mecánica (cinética y potencial).

Aplicando conservación de la cantidad de movimiento: $m_b v_b + m_t v_t = (m_b + m_t)v$ ⇨ $0,01·v_b + 0 = (0,01 + 1,5)v$ (1)

Tenemos dos incógnitas, pero la v la podemos calcular ahora por conservación de la energía *<u>después del impacto</u>*:

Como después del impacto no actúan fuerzas externas y teniendo en cuenta que ahora la masa suma 1,51 kg:

$(Ec + Ep_g)_f - (Ec + Ep_g)_i = 0$ ⇨ $(0 + Ep) – (Ec + 0) = 0$ ⇨ $1,51·10·0,15 - ½·1,51v^2 = 0$ ⇨ v = 1,73 m/s y sustituyendo este valor en la ecuación (1) $0,01·v_b + 0 = (0,01+ 1,5)v$ obtenemos: $0,01v_b = 1,51·1,73$ ⇨ **V_b = 262 m/s**

24) Teniendo en cuenta que un arco de tiro cumple con la ley de Hooke. Calcular la altura que alcanza una flecha lanzada verticalmente con un arco cuya constante de elasticidad es de 500 N/m y que se ha estirado 50 cm con una flecha de masa 58g. Suponer que el aire ofrece una fuerza resistiva constante de 0,05N (este es un dato ficticio, la fuerza resistiva del aire es muy compleja y depende de la presión y temperatura del aire, superficie y forma del cuerpo y su velocidad* al cuadrado, salvo a muy bajas velocidades en que es directamente proporcional a la velocidad)

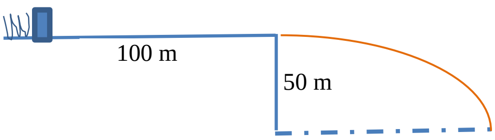
(*) Cuando un cuerpo cae desde una gran altura, su velocidad no va aumentando de forma constante con aceleración "g" ya que la fuerza resistente del aire (resistencia de un fluido) aumenta con la velocidad al cuadrado, por lo que llega un momento en que la fuerza resistente es igual al peso del cuerpo y por tanto ya no hay aceleración. La velocidad límite para caída libre de una persona en posición horizontal y extremidades extendidas es casi 200 km/h.

$\sum W = \Delta Em \Rightarrow \sum W = Em_f - Em_i \Rightarrow W_{Fr} = (Ec + Ep_g + Ep_e)_f - (Ec + Ep_e + Ep_g)_i \Rightarrow$

$F_r d\cos\alpha = (0 + 0 + mgh)_f - (0 + 0 + ½\, kx^2)_i \Rightarrow 0{,}05\cdot h\cos 180 = (0{,}058\cdot 10\cdot h)_f - (½\; 500\cdot 0{,}5^2)_i \Rightarrow$

$-0{,}05h = 0{,}58h - 62{,}5 \Rightarrow$ **h = 99,2 M** Sin la resistencia del aire hubiera alcanzado 107,8 m (calcúlalo)

25) Un gran muelle de k = 10.000 N/m está comprimido 30 cm tiene colocada delante una masa de 0,5 kg Al soltar el muelle la masa recorre 20 m por un plano horizontal con rozamiento μ = 0,1, para luego caer por un acantilado costero de 30 m (ver figura). A) Calcular la velocidad de impacto contra el mar. B) Si en el momento de soltar el muelle se activa un cohete pegado a la masa que le proporciona una fuerza constante de 50 N a favor durante los primeros 15 m, ¿cuál será la velocidad del impacto?



A) $\sum W = \Delta Em \Rightarrow \sum W = Em_f - Em_i \Rightarrow W_{Fr} = (Ec + Ep_g + Ep_e)_f - (Ec + Ep_e + Ep_g)_i \Rightarrow$

$F_r d\cos\alpha = (½\, mv^2 + 0 + 0)_f - (0 + mgh + ½\, kx^2)_i \Rightarrow \mu N\cdot d\cos 180 = (½\; 0{,}5\cdot v^2)_f - (0{,}5\cdot 10\cdot 30 + ½\; 10.000\cdot 0{,}3^2)_i \Rightarrow$

$0{,}1\cdot(0{,}5\cdot 10)\cdot 20\cdot(-1) = 0{,}25v^2 - 150 - 450 \Rightarrow -10 = 0{,}25v^2 - 600 \Rightarrow$ **v = 48,6 m/s**

B) $\sum W = \Delta Em \Rightarrow \sum W = Em_f - Em_i \Rightarrow W_{cohete} + W_{Fr} = (Ec + Ep_g + Ep_e)_f - (Ec + Ep_e + Ep_g)_i$

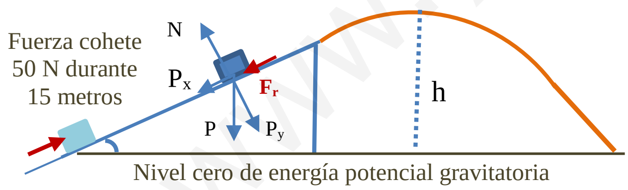
$F_{cohete} d\cos\alpha + F_r d'\cos\alpha' = (½\, mv^2 + 0 + 0)_f - (0 + mgh + ½\, kx^2)_i \Rightarrow$

$20\cdot 15\cdot \cos 0º + \mu N\cdot d\cos 180 = (½\; 0{,}5\cdot v^2)_f - (0{,}5\cdot 10\cdot 50 + ½\; 15.000\cdot 0{,}3^2)_i \Rightarrow$

$300 - 0{,}1\cdot(0{,}5\cdot 10)\cdot 20\cdot(-1) = 0{,}25v^2 - 150 - 450 \Rightarrow 500 - 50 = 0{,}25v^2 - 600 \Rightarrow$ **v = 64,8 m/s**

26) Un taco de madera tiene incorporado en la parte trasera un pequeño cohete. La masa del taco (incluido el cohete) es de 1,5 kg, está situada sobre una rampa de pendiente 30º y con una longitud de recorrido en rampa de 20 m con la que presenta un coeficiente de rozamiento 0,2. Si el cohete proporciona una fuerza constante de 50 N durante los 15 primeros metros de la rampa determinar: A) La velocidad de impacto del taco contra el suelo, que está situado a igual altura que la de partida (el taco se sale de la rampa).

Calculemos primero las componentes del peso Px y Py y la fuerza de rozamiento Fr:



$P_x = P\cos\alpha = 1{,}5\cdot 10\cdot\cos 30 = 13\ N$

$P_y = P\text{sen}\alpha = 1{,}5\cdot 10\cdot\text{sen}30 = 7{,}5\ N$

$F_r = \mu N = \mu P_y = 0{,}2\cdot 7{,}5 = 1{,}5\ Nggg$

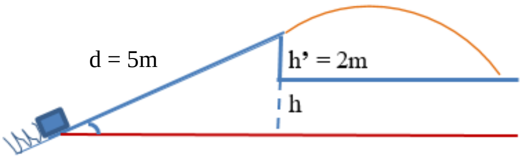
A) $\sum W = \Delta Em \Rightarrow \sum W = Em_f - Em_i \Rightarrow W_{cohete} + W_{Fr} = (Ec + Ep_g)_f - (Ec + Ep_g)_i \Rightarrow$

$F_{coh.} d_{coh}\cos 0º + F_r d_r \cos 180 = (½mv^2 + 0)_f - (0 + 0)_i \Rightarrow 50\cdot 15\cdot 1 + 1{,}5\cdot 20\cdot(-1) = ½\cdot 1{,}5v^2 \Rightarrow$ **v = 30,9 m/s**

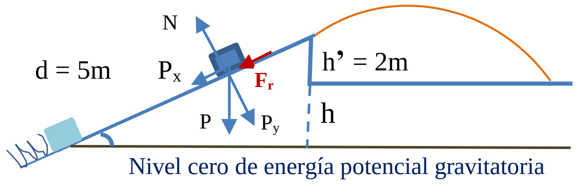
27) Un muelle de k = 300 N/m está comprimido 20 cm y tiene colocada una masa de 0,2 kg. Se suelta en lo bajo de una rampa (ver figura). Determinar:

a) Velocidad de impacto al llegar al suelo. b) altura máxima que alcanza la masa en su trayectoria.

DATOS: Pendiente de la rampa 30º. Coeficiente de rozamiento 0,1. Recorrido en la pendiente hasta el extremo 5 m. Altura de caída desde el extremo de la pendiente 2 m.



Calculemos primero las componentes del peso Px y Py y la fuerza de rozamiento Fr



$P_x = P\cos\alpha = 0{,}2\cdot 10\cdot \cos 30 = 1{,}73N$
$P_y = P\text{sen}\alpha = 0{,}2\cdot 10\cdot \text{sen}30 = 1$

$F_r = \mu N = \mu P_y = 0{,}1\cdot 1 = 0{,}1$

a) $\sum W = \Delta Em$ ⇨ $\sum W = Em_f - Em_i$ ⇨ $W_{Fr} = (Ec + Ep_g + Ep_e)_f - (Ec + Ep_g + Ep_e)_i$ **(1)**

Para determinar el valor de la E_{pg} al caer la masa en el plano horizontal debemos calcular la altura h.

Como la distancia del plano inclinado es 5 m y el ángulo 30º tenemos: (2 + h) = 5 sen30º ⇨ h = 0,5 m

Por tanto, para calcular v de impacto aplicamos **(1):** $W_{Fr} = (½\ mv^2 + mgh + 0)_f – (0 + 0 + ½\ kx^2)_f$ ⇨

$F_r d\cos\alpha = ½\ 0{,}2\cdot v^2 + 0{,}2\cdot 10\cdot 0{,}5 - ½\ 300\cdot 0{,}2^2$ ⇨ $0{,}1\cdot 5\cdot \cos 180 = 0{,}1v^2 + 1 – 6$ ⇨ $- 0{,}5 = 0{,}1v^2 -5$ ⇨ **v = 6,7 m/s**

b) Aquí es probable que supongas la condición de que en la altura máxima tengamos v = 0 y por tanto también sea cero la energía cinética. Pero no es así, la que es cero es la v_y, pero no la v_x por lo cual en la altura máxima si hay energía cinética. Por lo tanto, tenemos que calcular la velocidad con que sale la masa al final de la pendiente y determinar su componente v_x que recordarás, del tiro parabólico, que se mantiene constante en todo su recorrido.

Aplicando de nuevo **(1)** durante el trayecto de la rampa (cuya altura es de 2 + 0,5 = 2,5 m):

$W_{Fr} = (½\ mv^2 + mgh + 0) – (0 + 0 + ½\ kx^2)$ ⇨ $F_r d\cos\alpha = (½\ 0{,}2v^2 + 0{,}2\cdot 10\cdot 2{,}5) - ½\ 300\cdot 0{,}2^2$ ⇨

$0{,}1\cdot 5\cdot \cos 180 = ½\ 0{,}2v^2 + 5 – 6$ ⇨ $- 0{,}5 = 0{,}1v^2 - 1$ ⇨ v = 2,24 m/s

$V_x = v\cos\alpha = 2{,}24\cos 30 = 1{,}94$ m/s

Aplicando **(1)** teniendo en cuenta la existencia de energía cinética en el punto más alto:

$W_{Fr} = (½\ mv_x^2 + mgh + 0)_f – (0 + 0 + ½\ kx^2)_i$ ⇨ $F_r d\cos\alpha = (½\ 0{,}2v_x^2 + 0{,}2\cdot 10\cdot h) - ½\ 300\cdot 0{,}2^2$ ⇨

$0{,}1\cdot 5\cdot \cos 180 = (½\ 0{,}2\cdot 1{,}94^2 + 2h) – 6$ ⇨ $- 0{,}5 = 0{,}38 + 2h -6$ ⇨ **h = 2,56 m** (solo subió 0,06 m después de la rampa)

28) Un coche lleva una velocidad de 90 km/h, frena y disminuye su energía cinética en un 70%. Si el coeficiente de rozamiento en la frenada fue de μ = 0,8, determinar el espacio recorrido durante esa frenada.

90 km/h = 25 m/s.

La energía cinética final es un 30% de la inicial (si la disminuye en un 70% le queda el 30% restante).

Como actúa una fuerza externa: $\sum W = \Delta Em$ ⇨ $\sum W = Em_f - Em_i$ ⇨ $W_{Fr} = (Ec + 0+ 0)_f - (Ec + 0 + 0)_i$

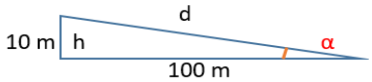
$Fr\cdot d\cdot \cos\alpha = Ec – 0{,}3\cdot Ec$ ⇨ $\mu N\cdot d\cdot \cos 180 = 0{,}7Ec$ ⇨ $- 0{,}8(\cancel{m}g)d = 0{,}7\cdot ½\ \cancel{m}v^2$ ⇨ $0{,}8.10\cdot d = 0{,}35\cdot 25^2$ ⇨ **d = 5,2m**

29) Un automóvil de 1500 kg está subiendo por una rampa del 10% (5,7º) a 15 m/s (54 km/h) frena a tope y se detiene en 22 m. En igualdad de condiciones ¿qué espacio recorre hasta detenerse si estuviera bajando? (usar g = 10 m/s). Este ejercicio ya se realizó en los ejercicios de Dinámica, pero ahora lo realizaremos por Trabajo y Energía (en dinámica es el nº26 o aproximado si se han incluido nuevos ejercicios)

Este ejercicio puede tener un pequeño grado de dificultad

Recordemos lo de la pendiente de una rampa

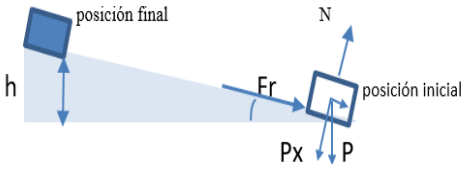
La pendiente que se indican en las señales de tráfico, por ejemplo 10% indica que por cada 100 m *recorridos en llano* se suben 10 m en altura



tg α = 10/100 → α = 5,7°

Por tanto, en nuestro caso al ser la distancia recorrida 22 m tenemos que la altura será de h = d·senα → h = 22·sen5,7 = 2,19 m

Lo primero que debemos hacer es calcular el coeficiente de rozamiento entre ruedas y asfalto en la frenada, aplicando trabajo y energía en las condiciones de la frenada en subida:



$\sum W = \Delta Em$ como no hay $E_{p\ elástica}$ ⇨ $\sum W = \Delta Ec + \Delta Ep$ ⇨

$W_{fr} = (E_{cf} - E_{ci}) + (E_{pf} - E_{pi})$

Como al final está parado→ $E_{cf} = 0$. Respecto a la energía potencial vamos a establecer como nivel cero el punto más bajo, en este caso de subida será la posición inicial (en el caso de la bajada será la posición final), de modo que la altura vendrá dada por 2,19 m ya calculada inicialmente al definir el concepto de pendiente:

$W_{fr} = (E_{cf} - E_{ci}) + (E_{pf} - E_{pi}) \rightarrow F_r d\cdot\cos 180 = (0 - ½\, mv^2) + (mgh_f - mgh_i) \rightarrow \mu\cdot P_x\cdot d\cdot(-1) = (0 - ½\, mv^2) + (mgh_f - 0)$

$\mu\cdot N\cdot d\cdot\cos 180 = - ½\, mv^2 + mgh \rightarrow -\mu\cdot P_x\cdot d = - ½\, m\cdot 15^2 + m\cdot 10\cdot 2{,}19 \rightarrow -\mu\cdot(mg\cdot\cos 5{,}17)\cdot d = - ½\, m\cdot 15^2 + m\cdot 10\cdot 2{,}19$

eliminamos m común a toso los miembros (ya lo avanzamos en el ejercicio resuelto por dinámica)

$- \mu\cdot 10(\cos 5{,}17)\cdot 22 = -112{,}5 + 21{,}9 \rightarrow \underline{\mu = 0{,}414}$

Ahora, conocido μ podemos calcular el recorrido en bajada, pero calculando previamente la altura (energía potencial) desde la cual bajará hasta pararse (ahora la altura final es cero):

$W_{fr} = (E_{cf} - E_{ci}) + (E_{pf} - E_{pi}) \rightarrow F_r d\cdot\cos 180 = (0 - ½\, mv^2) + (mgh_f - mgh_i) \rightarrow \mu\cdot P_x\cdot d\cdot(-1) = (0 - ½\, mv^2) + (0 - mgh)$

Como ya tenemos casi todos los cálculos respecto a la subida sustituimos los datos para la bajada, eliminando m:

$-0{,}414\cdot(10\cdot\cos 5{,}17)\cdot d = - ½\cdot 15^2 - 10\cdot h$ aparentemente tenemos dos incógnitas, d y h, pero como $h = d\cdot\text{sen}5{,}17$

$\rightarrow -4{,}123d = - 112{,}5 - 10\cdot d\cdot\text{sen}5{,}17 \rightarrow -4{,}123d = - 112{,}5 - 0{,}901\cdot d \rightarrow$ **d = 34,9 m**

Respecto al resultado de los cálculos por dinámica (d = 35,9) hay un error del 2,9% debido a las aproximaciones realizadas con los cálculos en ecuaciones distintas. Si se ajustan las aproximaciones en ambos casos se obtendrá el mismo resultado.

30) Un objeto de 1,4 kg de masa se une a un muelle de constante elástica 15 N/m, y vibra con una amplitud de 2,0 cm. ¿Cuál es el valor de las energías cinética y potencial elástica cuando el objeto se encuentra a 0,2 cm de la posición central de vibración?¿Qué velocidad lleva en esa posición?

$Ec = ½\, k(A^2 - x^2) = ½\cdot 15\cdot(0{,}02^2 - 0{,}002^2) = \mathbf{2{,}97\cdot 10^{-3}\ J = Ec}$

$Ep = ½\, kx^2 = ½\cdot 15\cdot 0{,}002^2 = \mathbf{3\cdot 10^{-5}\ J = Ep}$

Para calcular la velocidad que lleva en esa posición usaremos la Ec de esa posición:

$Ec = 2{,}97\cdot 10^{-3} = ½\, mv^2 = ½\cdot 1{,}4\cdot v^2 \rightarrow$ **v = 0,065 m/s**

31) ¿En qué posiciones de la partícula que describe un movimiento vibratorio armónico simple se igualan las energías cinética y potencial?

Ec = Ep → ½ $k(A^2 – x^2)$ = ½ kx^2 → $A^2 – x^2 = x^2$ → $A^2 = 2x^2$ → **x = ± A/√2**

32) Una masa de 100 g de masa está sometida a un movimiento vibratorio armónico simple y recorre, entre extremo y extremo, 10 cm de longitud en 1s. Si la partícula arranca desde la posición central dirigiéndose hacia posiciones positivas.

a) Calcula su energía cinética y potencial a los 2,5 s. b) ¿En qué primer momento, tiempo y posición, coinciden los valores de la energía cinética y de la energía potencial?

m = 0,001 kg   amplitud (la mitad de extremo a extremo) A = 0,1/2 = 0,05 m

Como la partícula tarda en recorrer 1s de extremo a extremo, para poder volver a la posición inicial tarda el doble, por tanto, el periodo T es de 2 s y la pulsación o frecuencia angular del movimiento (ω) será:

ω = 2π/T = 2π/2 = π rad/s

y el valor de la constante de elasticidad será k = $\omega^2 \cdot m = \pi^2 \cdot 0{,}1$ = 0,987 kg/s^2 (o N/m)

a) Para la Ec y Ep necesitamos saber el valor de la posición x, para ello aplicaremos x = A sen(ωt + ϕ_0) pero como parte de la posición central $\phi_0 = 0$. Por tanto la posición a los 2,5 s será:

x = A sen(ωt) = 0,05·sen(0,987·2,5) = 0,031 m   (recordar que el ángulo está en radianes)

Ep = ½kx^2 = ½ 0,987·$0{,}031^2$ = **$4{,}74\cdot10^{-4}$ J = Ep**

Ec = ½ $k(A^2 – x^2)$ = ½ ·0,987·($0{,}05^2 – 0{,}031^2$) = **$7{,}6\cdot10^{-4}$ J = Ec**

b) Ep = Ec → ½ kx^2 = ½ $k(A^2 – x^2)$ → $A^2 – x^2 = x^2$ → $A^2 = 2x^2$ → $0{,}05^2 = 2x^2$ → **x = 0,0354 m**

x = Asen(ωt) → 0,0354 = 0,05sen(ωt) → ωt = arcsen(0,0354/0,05) = 0,787 radianes →

ωt = 0,787 → t = 0,787/ω = 0,787/π = **0,25 s = t**