

# CINEMÁTICA

(En los ejercicios se aproxima siempre el valor de  $g$  a  $10 \text{ m/s}^2$ )

## MRU

1) Un móvil se mueve a una velocidad de  $15 \text{ m/s}$ . a) ¿Qué espacio recorre en  $40 \text{ s}$ ? b) ¿qué tiempo emplea en recorrer  $500 \text{ m}$ ?

2) Una persona camina durante hora y media, y recorre  $6 \text{ km}$  a velocidad constante. Calcula:

a) Su velocidad en  $\text{m/s}$ .

b) La velocidad si hubiese tardado una hora en realizar dicho trayecto.

c) El tiempo que tarda en recorrer  $15 \text{ km}$ , si camina a una velocidad de  $4,5 \text{ km/h}$ .

Pasemos a unidades internacionales:

$$\text{a) } t = 1\text{h} + 30 \text{ min} = 1 \times 60 \times 60 + 30 \times 60 = 5400 \text{ s} \quad x = 6 \text{ km} = 6 \times 1000 = 6000 \text{ m}$$

$$x = x_0 + vt \Rightarrow 6000 = 0 + v \times 5400 \Rightarrow v = 1,11 \text{ m/s}$$

$$\text{b) } t = 1 \text{ h} = 1 \times 60 \times 60 = 3600 \text{ s} \quad x = x_0 + vt \Rightarrow 6000 = 0 + v \times 3600 \Rightarrow v = 1,67 \text{ m/s}$$

$$\text{c) } t = \text{incognita a calcular} \quad x = 15 \text{ km} = 15 \times 1000 = 15000 \text{ m} \quad v = 4,5 \frac{\text{km}}{\text{h}} \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 1,25 \text{ m/s}$$

$$x = x_0 + vt \Rightarrow 15000 = 0 + 1,25 \times t \Rightarrow t = 12000 \text{ s} (3\text{h y } 20 \text{ min})$$

3) La luz que procede del Sol tarda en llegar a la Tierra  $8 \text{ min y } 20 \text{ s}$ . Sabiendo que la velocidad de la luz es de  $300000 \text{ km/s}$ , calcula la distancia existente entre el Sol y la Tierra.

Pasemos a unidades internacionales:

$$t = 8 \times 60 + 20 = 500 \text{ s}$$

$$v = 300.000 \text{ km/s} = 300.000 \times 1.000 \text{ m/s} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$x = x_0 + vt \Rightarrow x = 0 + 3 \times 10^8 \times 500 = 1,5 \times 10^{11} \text{ m} (150.000.000 \text{ Km})$$

## MRUA

1) Una nave espacial parte del reposo con aceleración constante y logra alcanzar en  $30 \text{ s}$  una velocidad de  $600 \text{ m/s}$ . Calcular: a) Aceleración. b) ¿Qué espacio recorrió en esos  $30 \text{ s}$ ?

$$v_0 = 0 \text{ m/s} \quad v = 600 \text{ m/s} \quad t = 30 \text{ s}$$

$$\text{a) } v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow v = a \cdot t \Rightarrow a = v/t \quad a = 600/30 \Rightarrow a = 20 \text{ m/s}^2$$

$$\text{b) } x = v_0 \cdot t + a \cdot t^2/2 \Rightarrow x = a \cdot t^2/2 \Rightarrow x = 20 \times 30^2/2 \quad x = 9000 \text{ m}$$

2) Un móvil parte del reposo con una aceleración de  $20 \text{ m/s}^2$  constante. a) ¿Qué velocidad tendrá después de  $15 \text{ s}$ ? b) ¿Qué espacio recorrió en esos  $15 \text{ s}$ ?

$$v_0 = 0 \text{ m/s}$$

$$a = 20 \text{ m/s}^2$$

$$t = 15 \text{ s}$$

$$\text{a) } v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow v = 0 + 20 \times 15 \Rightarrow v = 300 \text{ m/s}$$

$$\text{b) } x = x_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2/2 \Rightarrow x = 0 + 0 + 20 \times 15^2/2 \Rightarrow x = 2250 \text{ m}$$

3) ¿Cuánto tiempo tardará un móvil en alcanzar una velocidad de  $72 \text{ km/h}$ , si parte del reposo con aceleración de  $100 \text{ km/h}^2$ ?

Pasemos los datos a unidades internacionales

$$v_0 = 0 \text{ km/h} \rightarrow 0 \text{ m/s}$$

$$v = 72 \text{ km/h} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 20 \text{ m/s}$$

$$a = 100 \text{ km/h}^2 = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \left( \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right)^2 = 27,8 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Por tanto: } v = v_0 + at \Rightarrow 20 = 0 + 27,8t \Rightarrow t = 0,72 \text{ s}$$

**4) Cierta automóvil puede alcanzar una velocidad de 100 km/h, partiendo del reposo, en 7,5s. Suponiendo un MRUA, calcula: a) el espacio recorrido del automóvil en dicho tiempo. b) Velocidad a los 7,5 s.**

$$\text{a) } t = 7,5 \text{ s} \quad v_0 = 0 \quad v = 100 \text{ km/h} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 27,8 \text{ m/s}$$

$$\text{Al no conocer la aceleración será lo primero en calcular: } v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 27,8 = 0 + a \cdot 7,5 \Rightarrow a = 3,7 \text{ m/s}^2$$

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2 \Rightarrow x = 0 + 0 + 3,7 \times 7,5^2 / 2 \Rightarrow x = 104 \text{ m}$$

$$\text{b) } v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow v = 0 + 3,7 \times 7,5 \Rightarrow v = 27,75 \text{ m/s}$$

**5) El cañón de un rifle mide 60 cm y su bala sale con una velocidad de 650 m/s. ¿Cuánto tarda en salir la bala del rifle?**

$$v_0 = 0 \text{ m/s} \quad v = 650 \text{ m/s} \quad x = 60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m}$$

a) Como no conocemos  $a$  será lo primero en calcular:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a(x - x_0) \Rightarrow 650^2 = 0 + 2a(0,6 - 0) \Rightarrow a = 352083 \text{ m/s}^2$$

$$v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 650 = 0 + 352083 t \Rightarrow t = 0,00185 \text{ s}$$

**6) Un automóvil parte del reposo con una aceleración constante de  $3 \text{ m/s}^2$ , transcurridos 30 segundos deja de acelerar y sigue con velocidad constante, determinar:**

**a) ¿Cuántos metros recorrió en los 5 primeros segundos?**

**b) ¿Qué distancia habrá recorrido a los 1,5 minutos de la partida?**

$$v_0 = 0 \text{ m/s} \quad a = 3 \text{ m/s}^2$$

$$t_1 = 5 \text{ s} \quad t_2 = 1,5 \text{ min} = 1,5 \times 60 = 90 \text{ s}$$

$$\text{a) Movimiento acelerado: } x = x_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2 \Rightarrow x = 0 + 0 + 3 \times 5^2 / 2 \Rightarrow x = 37,5 \text{ m}$$

b) En este caso tenemos primero un movimiento acelerado durante 30 s y luego uno constante durante el resto del tiempo ( $90 - 30 = 60 \text{ s}$ ). Veamos el espacio recorrido en el tramo acelerado:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2 \Rightarrow x = 0 + 0 + 3 \times 30^2 / 2 \Rightarrow x = 1350 \text{ m}$$

$$\text{Veamos la velocidad que alcanzó a los 30 s: } v = v_0 + at \Rightarrow v = 0 + 3 \times 30 = 90 \text{ m/s}$$

$$\text{Veamos ahora el espacio total recorrido con los 60s del tramo de } v = \text{cte} = 90 \text{ m/s}$$

$$x = x_0 + vt \Rightarrow x = 1350 + 90 \times 60 \Rightarrow x = 6750 \text{ m}$$

**7) Un automóvil que viaja a una velocidad constante de 72 km/h frena y tarda 4 s en detenerse. Calcular:**

**a) ¿Qué espacio necesitó para detenerse?**

**b) ¿Qué velocidad llevaba a los 30 m del lugar donde aplicó los frenos?**

$$v = 0 \text{ m/s} \quad v_0 = 72 \text{ km/h} = (72 \text{ km/h}) \cdot (1000 \text{ m/1 km}) \cdot (1 \text{ h/3600 s}) = 20 \text{ m/s}$$

$$t = 4 \text{ s} \quad x_0 = 0$$

a) Como no conocemos la aceleración tenemos que calcularla:

$$v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 0 = 20 + a \cdot 4 \Rightarrow a = -5 \text{ m/s}^2 \text{ (negativa al ser de frenada)}$$

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2 \Rightarrow x = 0 + 20 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 / 2 \Rightarrow x = 40 \text{ m}$$

b) Para  $x = 30 \text{ m}$  y con la aceleración  $-5 \text{ m/s}^2$

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a(x - x_0) \Rightarrow v^2 = 20^2 + 2 \cdot (-5)(30 - 0) \Rightarrow v = 10 \text{ m/s}$$

**8) Un automóvil se desplaza a una velocidad de 72 km/h y frena hasta alcanzar una velocidad de 36 km/h, en 4s, manteniendo una aceleración constante. Calcula:**

**a) el espacio recorrido en ese tramo. b) la velocidad que tenía a los 10 m de frenada.**

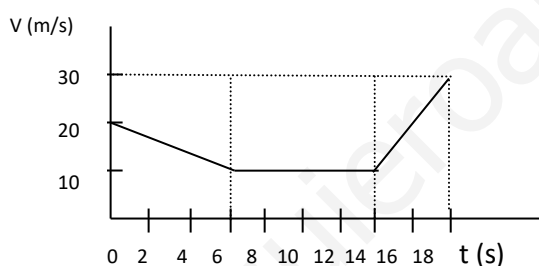
$$V_0 = 72 \text{ km/h} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 20 \text{ m/s} \quad v = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s} \quad t = 4 \text{ s}$$

Calculemos primero la aceleración:  $v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 10 = 20 + a \cdot 4 \Rightarrow a = -2,5 \text{ m/s}^2$

$$\text{a) } v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a(x - x_0) \Rightarrow 10^2 = 20^2 + 2(-2,5)(x - 0) \Rightarrow x = 60 \text{ m}$$

$$\text{b) } v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a(x - x_0) \Rightarrow v^2 = 20^2 + 2(-2,5)(10 - 0) \Rightarrow v = 18,7 \text{ m/s}$$

**9) Calcula el espacio recorrido en cada tramo por el móvil de la figura.**



El ejercicio tiene tres tramos:

I) Movimiento acelerado (decelerado):  $v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 10 = 20 + a \cdot 6 \Rightarrow a = -1,67 \text{ m/s}^2$

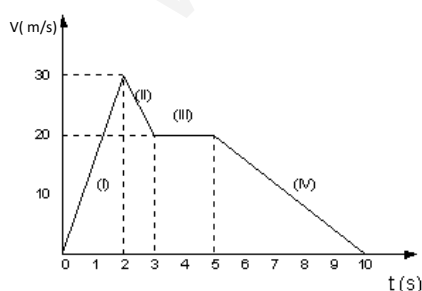
$$x = x_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2 \Rightarrow x = 0 + 20 \cdot 6 + (-1,67) \cdot 6^2 / 2 \Rightarrow x = 89,9 \text{ m}$$

II) Movimiento uniforme:  $x = x_0 + vt \Rightarrow x = 0 + 10 \cdot 8 \Rightarrow x = 80 \text{ m}$

III) Movimiento acelerado:  $v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 30 = 10 + a \cdot 4 \Rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2$

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2 \Rightarrow x = 0 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2 / 2 \Rightarrow x = 80 \text{ m}$$

**10) Calcular el espacio total recorrido por el móvil de la gráfica en 8 segundos:**



El ejercicio tiene cuatro tramos:

I) Movimiento acelerado:  $v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 30 = 0 + a \cdot 2 \Rightarrow a = 15 \text{ m/s}^2$

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2 \Rightarrow x = 0 + 0 + 15 \cdot 2^2 / 2 \Rightarrow x = 30 \text{ m}$$

II) Movimiento acelerado (decelerado):  $v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 20 = 30 + a \cdot 1 \Rightarrow a = -10 \text{ m/s}^2$

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2 \Rightarrow x = 30 + 30 \times 1 + (-10) \times 1^2 / 2 \Rightarrow x = 55 \text{ m}$$

$$\text{III) Movimiento uniforme: } x = x_0 + vt \Rightarrow x = 55 + 20 \times 2 = 95 \text{ m}$$

IV) Movimiento acelerado (decelerado). Calculamos la aceleración de todo el tramo IV que es la misma que desde el segundo 5 al 8:  $v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 0 = 20 + a5 \Rightarrow a = -4 \text{ m/s}^2$

Ahora usaremos el tiempo de  $8 - 5 = 3$  para el IV tramo:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2 \Rightarrow x = 95 + 20 \times 3 + (-4) \times 3^2 / 2 \Rightarrow x = 137 \text{ m (hemos ido sumando los espacios de cada tramo)}$$

**11) Un coche se aproxima a un semáforo en rojo a velocidad constante de 36 km/h, frena y reduce su velocidad, hasta detenerse a los 4s. Permanece parado durante 10s. Arranca y consigue alcanzar una velocidad de 54 km/h en 5 s y luego mantiene la velocidad constante durante un largo tiempo.**

**a) Calcula el espacio total recorrido en 30 s desde el inicio de la frenada. b) Construye las gráficas v-t y x-t.**

El ejercicio consta de cuatro fases:

I) Frenada antes del semáforo:  $v_0 = 36 \text{ km/h} = 36/3,6 = 10 \text{ m/s}$      $v = 0$      $t = 4 \text{ s}$

$$v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 0 = 10 + a4 \Rightarrow a = -2,5 \text{ m/s}^2$$

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2 \Rightarrow x = 0 + 10 \times 4 - 2,5 \times 4^2 / 2 \Rightarrow x = 20 \text{ m}$$

II) Parado 10 s

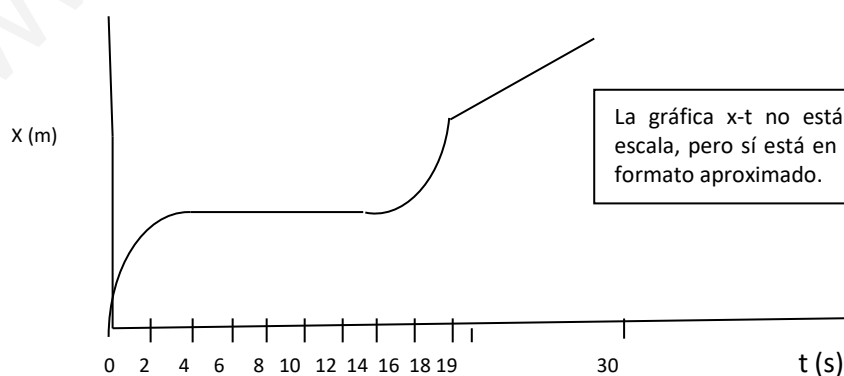
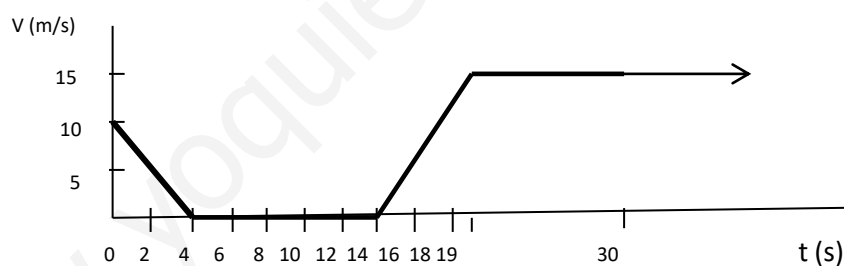
III) Aceleración después de semáforo con  $v \text{ final} = 54/3,6 = 15 \text{ m/s}$ :

$$v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 15 = 0 + a5 \Rightarrow a = 3 \text{ m/s}^2$$

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2 \Rightarrow x = 20 + 0 + 3 \times 5^2 / 2 \Rightarrow x = 57,5 \text{ m}$$

IV) Velocidad constante de 15 m/s durante el tiempo restante a 30 s tras el inicio de la frenada, es decir:

$$30 - 4 - 10 - 5 = 11 \text{ s} \Rightarrow x = x_0 + vt \Rightarrow x = 57,5 + 15 \times 11 = 222,5 \text{ m}$$

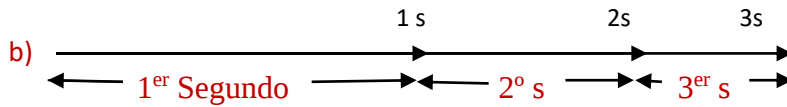


**12) Un móvil lleva una velocidad de 40 m/s. Frena uniformemente y en 5s se pone a 10 m/s. Calcular:**

**a) Velocidad después de 20 m de recorrido. b) Espacio que recorrió en el tercer segundo.**

$$\text{Calculamos primero la aceleración: } v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 10 = 40 + a5 \Rightarrow a = -6 \text{ m/s}^2$$

$$\text{a) } v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x - x_0) \Rightarrow v^2 = 40^2 + 2(-6)(20 - 0) \Rightarrow v = 36,9 \text{ m/s}$$



Para calcular el espacio recorrido en el 3<sup>er</sup> segundo debemos calcular el espacio recorrido en 3 segundos y restarle el recorrido en 2 segundos:

$$\text{En } 3 \text{ s} \Rightarrow x = x_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2 \Rightarrow x = 0 + 40 \times 3 + (-6) \times 3^2 / 2 \Rightarrow x = 93 \text{ m}$$

$$\text{En } 2 \text{ s} \Rightarrow x = x_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2 \Rightarrow x = 0 + 40 \times 2 + (-6) \times 2^2 / 2 \Rightarrow x = 68 \text{ m}$$

$$\text{Espacio recorrido en el 3er segundo} \Rightarrow 93 - 68 = 25 \text{ m}$$

**13) Un móvil se desplaza con velocidad constante y aplica los frenos durante 25 s, recorriendo una distancia de 400 m hasta pararse. Calcular:**

**a) Velocidad del móvil antes de aplicar los frenos.**

**b) Aceleración provocada por los frenos.**

$$t = 25 \text{ s}$$

$$x = 400 \text{ m}$$

$$v = 0 \text{ m/s}$$

$$(1) v = v_0 + a \cdot t$$

$$(2) x = x_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2$$

$$(3) v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a(x - x_0)$$

Con ninguna de las ecuaciones se puede determinar  $v_0$  ni  $a$  directamente.

a) Pero sí usando el sistema de ecuaciones (1) y (2).

$$\text{Despejamos "a" de (1)} \Rightarrow v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 0 = v_0 + a \cdot t \Rightarrow a = -v_0 / t \Rightarrow a = -v_0 / 25$$

Y reemplazando este valor de "a" en (2):

$$x = v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2 \Rightarrow 400 = v_0 \cdot 25 + (-v_0 / 25) \cdot 25^2 / 2 \Rightarrow 400 = 25 v_0 - 12,5 v_0 \Rightarrow v_0 = 32 \text{ m/s}$$

$$\text{b) } v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 0 = 32 + a \cdot 25 \Rightarrow a = -1,28 \text{ m/s}^2$$

## MOVIMIENTO VERTICAL

**1) Lanzamos hacia abajo una piedra desde un puente con una velocidad de 20 m/s. Tarda en caer al agua 2,5 s. Calcula:**

**a) La velocidad con que llega la piedra al suelo. b) La altura del puente respecto al suelo.**

$$v_0 = -20 \text{ m/s} \quad t = 2,5 \text{ s} \quad a = -10 \text{ m/s}^2 \quad v = \text{incógnita a calcular en a)} \quad y_0 = \text{incógnita a calcular en b)}$$

$$\text{a) } v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow v = -20 - 10 \times 2,5 \Rightarrow v = -45 \text{ m/s}$$

$$\text{b) } y = y_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2 \Rightarrow 0 = y_0 - 20 \times 2,5 - 10 \times 2,5^2 / 2 \Rightarrow y_0 = 81,25 \text{ m}$$

**2) A ras del suelo se tira un cuerpo verticalmente hacia arriba con velocidad de 25 m/s. Calcula: a) la altura máxima que alcanza. b) El tiempo que emplea.**

$$v_0 = 25 \text{ m/s} \quad y_0 = 0 \quad a = -10 \text{ m/s}^2 \quad v = 0 \quad (\text{al llegar a la altura máxima la velocidad es cero})$$

$$y = \text{incógnita a calcular en a)} \quad t = \text{incógnita a calcular en b)}$$

$$\text{a) } v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a(y - y_0) \Rightarrow 0^2 = 25^2 - 2 \times 10(y - 0) \Rightarrow y = 31,25 \text{ m}$$

$$\text{b) } v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 0 = 25 - 10t \Rightarrow t = 2,5 \text{ s}$$

**3) Desde el suelo se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con la velocidad inicial de 120 m/s. Determine: a) La velocidad del cuerpo al cabo de 15s b) La posición del cuerpo a los 8s del lanzamiento c) La altura máxima que puede alcanzar. d) El tiempo en alcanzar la altura máxima.**

a)  $v_0 = 120 \text{ m/s}$     $t = 30 \text{ s}$     $a = -10 \text{ m/s}^2$  (aproximación de -9,8)    $v =$  incógnita a calcular

$v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow v = 120 - 10 \times 15 \Rightarrow v = -30 \text{ m/s}$  al ser negativa indica que está bajando

b)  $y_0 = 0$     $y =$  incógnita a calcular    $v_0 = 120 \text{ m/s}$     $t = 8 \text{ s}$     $a = -10 \text{ m/s}^2$

$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow y = 0 + 120 \times 8 - \frac{1}{2} 10 \times 8^2 = 960 - 320 = 640 \text{ m}$

c)  $y_0 = 0$     $y =$  incógnita a calcular    $a = -10 \text{ m/s}^2$     $v_0 = 120 \text{ m/s}$     $v = 0$  (velocidad en la altura máxima)

$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0) \Rightarrow 0 = 120^2 - 2 \times 10 (y - 0) \Rightarrow y = 720 \text{ m}$

d)  $y_0 = 0$     $t =$  incógnita a calcular    $a = -10 \text{ m/s}^2$     $v_0 = 120 \text{ m/s}$     $v = 0$

$v = v_0 + a t \Rightarrow 0 = 120 - 10 t \Rightarrow t = 12 \text{ s}$

**4) Desde una altura de 100m se lanza un cuerpo verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de 5 m/s.**

**a) ¿Cuál será su velocidad luego de haber descendido 3 s. b) ¿A qué altura se encuentra a los 3 s?**

**c) ¿Cuál será su velocidad a falta de 25 m para llegar al suelo? d) ¿en cuánto tiempo alcanzará el suelo? e) ¿Con qué velocidad lo hará?**

$v_0 = -5 \text{ m/s}$     $t = 3 \text{ s}$     $y = 200 \text{ m}$     $h = 14 \text{ m}$

a)  $v = v_0 + a t$     $v = -5 - 10 \times 3 \Rightarrow v = -35 \text{ m/s}$  (negativa pues es descendiendo)

b)  $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow y = 100 - 5 \times 3 - 10 \times 3^2 / 2 \Rightarrow y = 40 \text{ m}$

c)  $v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0) \Rightarrow v^2 = (-5)^2 - 2 \times 10 (25 - 100) \Rightarrow v = -39 \text{ m/s}$  (se toma la respuesta negativa puesto que está bajando)

d)  $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow 0 = 100 - 5t - 10 \cdot t^2 / 2 \Rightarrow 5t^2 + 5t - 100 = 0$     $t = 4 \text{ s}$

Aplicamos la ecuación cuadrática que dará dos resultados:

e)  $v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0) \Rightarrow v^2 = (-5)^2 - 2 \times 10 (0 - 100) \Rightarrow v = -45 \text{ m/s}$

**5) Desde lo alto de un edificio de 20 m se tira una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 25 m/s. a) ¿Cuánto tardará en llegar a la altura máxima? b) ¿Qué altura alcanza? c) ¿Cuánto tarda en llegar al suelo? d) ¿Con qué velocidad llega al suelo? e) ¿Qué velocidad lleva a los 2 y 4 s?**

$v_0 = 25 \text{ m/s}$     $y_0 = 20 \text{ m}$     $a = -10 \text{ m/s}^2$

a) La velocidad en la altura máxima será  $v = 0$ :  $v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 0 = 25 - 10t \Rightarrow t = 2,5 \text{ s}$

b) La velocidad en la altura máxima será  $v = 0$

$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0) \Rightarrow 0^2 = 25^2 - 2 \cdot 10 (y - 20) \Rightarrow 0 = 625 - 20y + 400 \Rightarrow y = 51,25 \text{ m}$

c)  $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow 0 = 20 + 25t - 10 \cdot t^2 / 2 \Rightarrow 5t^2 - 25t - 20 = 0$     $t = 5,7 \text{ s}$

d)  $v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0) \Rightarrow v^2 = 25^2 - 2 \times 10 (0 - 20) \Rightarrow v = -32 \text{ m/s}$  (se toma la respuesta negativa puesto que está bajando)

e) A los 2s  $v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow v = 25 - 10 \cdot 2 \Rightarrow v = 5 \text{ m/s}$  (positiva  $\rightarrow$  subiendo)

A los 4s  $v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow v = 25 - 10 \cdot 4 \Rightarrow v = -15 \text{ m/s}$  (negativa  $\rightarrow$  bajando)

6) Desde un puente sobre un río de 30 m de altura, se lanza hacia abajo una piedra, que tarda 2 s en llegar al agua. Calcula: a) La velocidad de llegada al agua. b) La velocidad con que se lanzó la piedra desde el puente.

$$t = 2 \text{ s} \quad a = -10 \text{ m/s}^2 \quad y_0 = 30 \text{ m} \quad y = 0 \quad v_0 = \text{incógnita a calcular en a)} \quad v = \text{incógnita a calcular en b)}$$

a) En cualquiera de las ecuaciones necesitamos conocer la  $v_0$ , por lo tanto calculamos primero el apartado b)

$$b) y = y_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2 \Rightarrow 0 = 30 + v_0 \cdot 2 - 10 \cdot 2^2 / 2 \Rightarrow 2v_0 = -30 + 20 \quad v_0 = -5 \text{ m/s}$$

$$a) v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow v = -5 - 10 \cdot 2 \Rightarrow v = -25 \text{ m/s}$$

7) Un observador situado a 40 m de altura ve pasar un cuerpo hacia arriba con una cierta velocidad y al cabo de 10 s lo ve pasar hacia abajo. ¿Cuál fue la velocidad inicial con que se lanzó desde el suelo?

Este ejercicio hay que reconvertirlo. Veamos.

Los 10 s entre verlo subir y verlo bajar, se componen de 5 s subiendo hasta la altura máxima ( $v_f = 0$ ) y 5 s en volver a la altura de los 40 m. Por lo tanto hay que resolverlo en dos pasos. El primero es calcular la velocidad con que se lanza un cuerpo para que alcance su máxima altura ( $v = 0$ ) en 5 s. Y la segunda parte es calcular con qué velocidad hay que lanzar un cuerpo para que a los 40 m de altura lleve una velocidad  $v$  (la calculada anteriormente)

$$a) v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow 0 = v_0 - 10 \cdot 5 \Rightarrow v_0 = 50 \text{ m/s}$$

$$b) v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (y - y_0) \Rightarrow 50^2 = v^2 - 2 \cdot 10 \cdot (40 - 0) \Rightarrow v = 57,4 \text{ m/s}$$

## ENCUENTROS Y ALCANCES.

*En la mayoría de los casos de encuentros y alcances lo primero es determinar el tiempo de ese encuentro aplicando  $X_A = X_B$  (en el momento del encuentro la "posición" de los dos móviles es la misma. Evidentemente se pueden plantear otros tipos de ejercicios de encuentros en donde entre los datos figure el tiempo y se pidan otras incógnitas, pero igualmente se aplicará  $X_A = X_B$ ).*

*Hay que prestar atención al signo de las velocidades y aceleraciones, según se muevan en los ejes de coordenadas (aplicando el criterio ya conocido). Otra cuestión a tener en cuenta es que las distancias se van a referir a posiciones en el eje de ordenadas*

1) Dos móviles parten simultáneamente, uno lo hace desde un punto A dirigiéndose hacia el punto B y otro del punto B dirigiéndose hacia el punto A, distantes entre sí 5000 m. El que parte de A lo hace con una velocidad de 30 m/s y el que parte de B con una velocidad de 20 m/s ¿Cuándo y dónde se encuentran?



Para que ambos se encuentren se debe cumplir que ambos estén en la misma posición:  $X_A = X_B$

$$X_A = X_B \Rightarrow (x_0 + vt)_A = (x_0 + vt)_B \Rightarrow 0 + 30t = 5000 - 20t \quad (v_B = -20 \text{ ya que se mueve en el sentido negativo}) \Rightarrow 50t = 5000 \Rightarrow t = 100 \text{ s}$$

Reemplazando este tiempo en cualquiera de las  $X$  se obtiene la distancia de encuentro

$$X_A = 30t = 30 \cdot 100 \Rightarrow X_A = 3000 \text{ m del origen A}$$

2) Un automóvil A parte desde un punto con una velocidad constante de 15 m/s. 5 minutos más tarde sale del mismo punto en su persecución otro vehículo B a una velocidad constante de 72 km/h. ¿A qué distancia del punto de partida lo alcanzará?

$$v_A = 15 \text{ m/s} \quad v_B = 72 \text{ km/h} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 20 \text{ m/s}$$

Veamos el tiempo:  $t_A = t$  pero  $t_B = t - 300$  (como sale más tarde se mueve menos tiempo  $\rightarrow 5 \text{ min} \times 60 = 300 \text{ s}$ )

$$X_A = X_B \Rightarrow (x_0 + vt)_A = (x_0 + vt)_B \Rightarrow 0 + 15t = 0 + 20(t-300) \Rightarrow 15t = 20t - 6000 \Rightarrow 5t = 6000 \Rightarrow t = 1200 \text{ s}$$

Veamos distancia recorrida por A:  $x_A = (x_0 + vt)_A \Rightarrow x_A = 0 + 15 \cdot 1200 = 18000 \text{ m}$

Si hubiéramos empleado el espacio recorrido por B sería:  $x_B = (x_0 + vt)_B = 0 + 20(t-300) = 20(1200 - 300) = 18000 \text{ m}$

**3) Desde un punto A un móvil que lleva una velocidad de 2 m/s acelera con  $a = 1,5 \text{ m/s}^2$  en dirección a B. Simultáneamente de B, distante 500 m parte un móvil con velocidad constante de 20 m/s. Calcular el espacio que ha recorrido el móvil A y el B y la velocidad de B en el momento del encuentro.**

Para que ambos se encuentren se debe cumplir que ambos estén en la misma posición:  $X_A = X_B$

$$X_A = X_B \Rightarrow (X_{0A} + v_{0A} t_A + \frac{1}{2} \cdot a t_A^2)_A = (x_0 + vt)_B \Rightarrow 0 + 2t + 0,75t^2 = 500 - 20t \Rightarrow 0,75t^2 + 22t - 500 = 0 \rightarrow t = 15,03 \text{ s}$$

(la otra solución es un tiempo negativo que no tiene sentido)

Por tanto, el espacio recorrido por A será  $\rightarrow X_{0A} + v_{0A} t_A + \frac{1}{2} \cdot a t_A^2 = 0 + 2t + \frac{1}{2} \cdot 1,5t^2 = 2 \cdot 15,03 + 0,75 \cdot 15,03^2 = 199,5 \text{ m}$   
Y su velocidad será  $\rightarrow V = v_0 + at = 2 + 1,5 \cdot 15,03 = 24,55 \text{ m/s}$

Para calcular el espacio recorrido por B tenemos dos opciones. La primera restar a la distancia de inicial que los separa, el espacio recorrido por A, es decir,  $500 - 199,5 = 300,5 \text{ m}$

Pero si no nos hubieran pedido previamente la distancia recorrida por A, tendríamos que aplicar para B: primero su posición final  $\rightarrow x = x_0 + vt \rightarrow x = 500 - 20 \cdot 15,03 = 199,4 \text{ m}$  y ahora, el recorrido será:

posición inicial - posición final =  $500 - 199,4 = 300,6 \text{ m}$  que es el valor (aproximado) que calculamos antes.

VER FINAL DEL EJERCICIO 6, DONDE SE TRATA UN CASO SIMILAR

**4) Desde un puente de 40 m de altura se suelta una piedra y al mismo tiempo se lanza desde el suelo otra hacia arriba a 20 m/s, ¿a qué altura se cruzan? (Usaremos  $g = -10 \text{ m/s}^2$ )**

$$\text{Para el que cae (A): } y_A = (y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \cdot a t^2)_A \Rightarrow y_A = 40 + 0 - \frac{1}{2} \cdot 10t^2 \Rightarrow y_A = 40 - 5t^2$$

$$\text{Para el que sube (B): } y_B = (y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \cdot a t^2)_B \Rightarrow y_B = 0 + 20t - \frac{1}{2} \cdot 10t^2 \Rightarrow y_B = 20t - 5t^2$$

$$\text{En el encuentro } y_A = y_B \Rightarrow 40 - 5t^2 = 20t - 5t^2 \Rightarrow 40 = 20t \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

$$\text{Veamos la posición del que baja: } y_A = 40 - 5t^2 \Rightarrow y_A = 40 - 5 \cdot 2^2 = 20 \text{ m}$$

$$\text{Que coincide con la altura que alcanza B: } y_B = 20t - 5t^2 \Rightarrow y_B = 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 \Rightarrow y_B = 20 \text{ m}$$

**5) Un móvil con velocidad 10 m/s acelera con  $2 \text{ m/s}^2$  desde un punto A. Al cabo de 2 segundos sale otro móvil desde B hacia A con velocidad constante de 30 m/s. Si entre A y B hay 1500 m, determina: a) Espacio recorrido por A. c) Velocidad de A en el encuentro.**

¡Nota! Podemos usar  $t_A = t$  y  $t_B = t - 2$  o bien  $t_B = t$  y  $t_A = t + 2$  de forma indistinta, pero como el móvil A es acelerado lleva  $t^2$  y por tanto emplear  $t_A^2 = (t + 2)^2$  complica los cálculos. Por tanto usaremos:

$$t_A = t \text{ y } t_B = t - 2$$

$$\text{Para A: } X_A = X_{0A} + v_{0A} t_A + \frac{1}{2} \cdot a t_A^2 \Rightarrow X_A = 0 + 10t + \frac{1}{2} \cdot 2t^2 \Rightarrow X_A = 10t + t^2$$

$$\text{Para B: } X_B = X_{0B} + v_B t_B \Rightarrow X_B = 1500 - 30(t - 2) \Rightarrow X_B = 1560 - 30t$$

$$\text{Como en el encuentro } X_A = X_B \Rightarrow 10t + t^2 = 1560 - 30t \Rightarrow t^2 + 40t - 1560 = 0 \Rightarrow t = 24,3 \text{ s}$$

$$\text{a) } X_A = X_{0A} + v_{0A} t + at^2/2 \Rightarrow X_A = 0 + 10 \cdot 24,3 + 2 \cdot 24,3^2/2 \Rightarrow X_A = 833,5 \text{ m}$$

$$\text{b) } v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow v = 10 + 2 \cdot 24,3 \Rightarrow v = 58,6 \text{ m/s}$$

**6) Un móvil parte del reposo con aceleración  $4 \text{ m/s}^2$  de un punto A en dirección a B. Al mismo tiempo sale otro móvil desde B en dirección a A con velocidad constante de 20 m/s. Determina el espacio recorrido por B sabiendo que entre A y B inicialmente había 3000 m**

$$\text{Para A: } X_A = X_{0A} + v_{0A} t + at^2/2 \Rightarrow X_A = 0 + 0 + 4 \cdot t^2/2 \Rightarrow X_A = 2t^2$$

$$\text{Para B: } X_B = X_{0B} + v_B t \Rightarrow X_B = 3000 - 20t$$

$$\text{Como en el encuentro } X_A = X_B \Rightarrow 2t^2 = 3000 - 20t \Rightarrow 2t^2 + 20t - 3000 = 0 \Rightarrow t = 34,05 \text{ s}$$

¡CUIDADO! La pregunta del espacio recorrido por B tiene trampa. Si nos hubieran preguntado el espacio recorrido por A sería:  $X_A = 2t^2 = 2 \cdot 34,05^2 = 2319 \text{ m}$ . Pero para B si hacemos  $X_B = 3000 - 20t = 3000 - 20 \cdot 34,05 = 2319 \text{ m}$  da igual resultado que A porque lo que estamos calculando es el punto de encuentro. Para el cálculo del espacio recorrido por B será  $3000$  (donde estaba inicialmente)  $- 2319$  (el punto de encuentro) = **681 m**.

O bien  $X_B = X_0 + at = 0 - 20 \cdot 34,05 = \mathbf{681 \text{ m}}$  (los 3000 m no los recorrió en el tiempo de 34,05s)

**7) Un móvil parte del reposo con aceleración  $4 \text{ m/s}^2$  de un punto A. Al cabo de 2 segundos sale otro móvil desde el mismo punto con igual dirección y sentido pero con velocidad constante de  $25 \text{ m/s}$ . Determina: a) Espacio recorrido cuando B adelanta a A. b) Velocidad de A cuando éste adelanta a B.**

¡Nota! Podemos usar  $t_A = t$  y  $t_B = t - 2$  o bien  $t_B = t$  y  $t_A = t + 2$  de forma indistinta, pero como el móvil A es acelerado lleva  $t^2$  y por tanto emplear  $t_A^2 = (t + 2)^2$  complica los cálculos. Por tanto usaremos  $t_A = t$  y  $t_B = t - 2$

Para A:  $X_A = X_{0A} + V_{0A}t_A + \frac{1}{2}at_A^2 \Rightarrow X_A = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot t^2 \Rightarrow X_A = 2t^2$

Para B:  $X_B = X_{0B} + V_B t_B \Rightarrow X_B = 0 + 25(t - 2) \Rightarrow X_B = 25t - 50$

Como en el encuentro  $X_A = X_B \Rightarrow 2t^2 = 25t - 50 \Rightarrow 2t^2 - 25t + 50 = 0 \Rightarrow t_1 = 2,5 \text{ s}$  y  $t_2 = 10 \text{ s}$  (dos encuentros)

Veamos como ocurren estos encuentros:

Primero parte desde el reposo y acelerando el móvil A, luego parte el móvil B con velocidad cte pero lo suficiente como para adelantar a A (en 2,5 s). Pero como A tiene aceleración, su velocidad irá creciendo y terminará adelantando a B (a los 10 s).

a) Cuando B adelanta a A estamos en el primer adelantamiento, por tanto  $t = 2,5 \text{ s}$ . El espacio recorrido por B será:

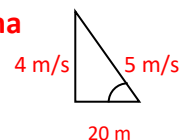
$X_B = X_{0B} + V_B t_B \Rightarrow X_B = 0 + 25(t - 2) \Rightarrow X_B = 25(2,5 - 2) = \mathbf{12,5 \text{ m}}$  (que es el mismo que recorre A)

b) Cuando A adelanta a B estamos en el segundo adelantamiento, por tanto  $t = 10 \text{ s}$ . La velocidad de A será:

$v_A = v_{0A} + at_A \Rightarrow v_A = 0 + 4 \cdot 10 = \mathbf{40 \text{ m/s}}$

**8) Un móvil tiene una velocidad constante de  $4 \text{ m/s}$  cuando a  $20 \text{ m}$  a la derecha parte un móvil con velocidad  $5 \text{ m/s}$  a su alcance (ver esquema).**

**Calcular el ángulo del móvil para que se pueda producir el encuentro.**



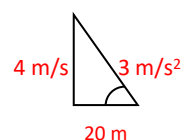
Podríamos pensar en  $x = vt \rightarrow t = x/v$  y como los tiempos son iguales para que ocurra el encuentro igualaríamos los tiempos  $\rightarrow x/4 = x'/5$  pero no podemos resolver el triángulo porque tenemos dos incógnitas  $x$  y  $x'$ .

Sin embargo si podemos decir que el cateto vertical tiene una longitud  $4t$  y la hipotenusa  $5t$ , por tanto resolvemos el triángulo por Pitágoras  $\rightarrow (5t)^2 = (4t)^2 + 20^2 \rightarrow 25t^2 = 16t^2 + 400 \rightarrow 9t^2 = 400 \rightarrow t = 6,67 \text{ s}$

La hipotenusa mide por tanto  $x = vt = 5 \cdot 6,67 = 33,35$  y ahora ya aplicamos  $\cos \alpha = 20/33,35 \rightarrow \alpha = \mathbf{53,2^\circ}$

**9) Un móvil tiene una velocidad constante de  $4 \text{ m/s}$  cuando a  $20 \text{ m}$  a la derecha parte un móvil desde el reposo y con aceleración  $3 \text{ m/s}^2$  a su alcance (ver esquema).**

**Calcular el ángulo del móvil para que se pueda producir el encuentro.**



Al igual que en el ejercicio anterior tendremos que el cateto vertical es  $4t$  pero para la hipotenusa debemos aplicar  $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow x = 0 + 0 + \frac{1}{2}3t^2$  es decir, la hipotenusa vale  $1,5t^2$

Aplicamos Pitágoras  $\rightarrow (1,5t^2)^2 = (4t)^2 + 20^2 \rightarrow 2,25t^4 = 16t^2 + 400 \rightarrow 2,25t^4 - 16t^2 - 400 = 0$  Pero esta ecuación de 4º grado se puede transformar en una de 2º grado haciendo un cambio de variables  $\rightarrow t^2 = y$  y por lo cual la ecuación se convierte en  $2,25y^2 - 16y - 400 = 0 \rightarrow y = 17,35 \rightarrow t^2 = 17,35 \rightarrow t = 4,17 \text{ s}$

Por tanto la hipotenusa mide  $x = 1,5t^2 = 1,5 \cdot 4,17^2 = 26,1 \text{ m}$  y aplicando  $\cos \alpha = 20/26,1 \rightarrow \alpha = \mathbf{40^\circ}$

## MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Entre sustituir velocidades lineales por velocidades angulares y frecuencia por periodo, aparecen muchas fórmulas para el movimiento circular, sin embargo aquí sólo usaremos las surgidas de las definiciones y cuando sea necesario aplicaremos las sustituciones necesarias. Por tanto las ecuaciones a utilizar son:

$$S = \varphi r \quad \omega = \varphi/t \quad v = \omega r \quad T = 1/f \quad \omega = 2\pi/T \quad a_c = v^2/r$$

**1) Un móvil da vueltas por una pista circular de 0,5 de radio con una velocidad constante de 0,1 m/s. Calcula: a) la velocidad angular; b) la aceleración centrípeta; c) el período y la frecuencia; d) número de vueltas que dará en 2 minutos.**

a) Aplicando  $v = \omega r \Rightarrow 0,1 = \omega \times 0,5 \Rightarrow \omega = 0,2 \text{ rad/s}$ .

b) De la aceleración centrípeta  $a_c = v^2/r = 0,1^2/0,5 \Rightarrow a_c = 0,02 \text{ m/s}^2$ .

c) Para el período, aplicamos  $\omega = 2\pi/T \Rightarrow T = 2\pi/\omega = 2\pi/0,2 = 31,42 \text{ s}$

De  $t/1/f \Rightarrow f = 1/T = 1/31,42 = 0,032 \text{ Hz}$  o rps.

d) Por tanto como  $f = 0,032 \text{ rps}$ , tenemos que en 2 min será  $0,032 \times (2 \times 60) = 3,84 \text{ vueltas}$

**2) El minuterero de un reloj del reloj de una iglesia tiene una longitud de 0,8 m. Calcula su velocidad lineal y angular y su aceleración centrípeta (todo en el S.I.).**

El periodo del minuterero es de 60 min =  $60 \times 60 = 3600 \text{ s} = T$

Por tanto de  $\omega = 2\pi/T \Rightarrow \omega = 2\pi/3600 = 1,745 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$

Y de  $v = \omega r \Rightarrow v = 1,745 \times 10^{-3} \times 0,8 = 1,396 \times 10^{-3} \text{ m/s}$

Por tanto:  $a_c = v^2/r = (1,396 \times 10^{-3})^2/0,8 = 2,44 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$

**3) Si el diámetro de una rueda es de 90 cm y gira a 300 r.p.m. calcular la velocidad lineal en un punto de su periferia .**

$d = 0,9 \text{ m} \Rightarrow r = 0,45 \text{ m}$   $f = 300 \text{ rpm} = 300/60 \text{ rps} \Rightarrow f = 5 \text{ rps}$  o Hz

como  $f = 1/T$  si aplicamos  $\omega = 2\pi/T \Rightarrow \omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2\pi \times 5 = 31,42 \text{ rad/s}$

Y como  $v = \omega r = 31,42 \times 0,45 = 14,14 \text{ m/s}$

**4) Un móvil dotado de M.C.U. da 210 vueltas en 15 segundos con una velocidad de 15 m/s. a) ¿Cuál es su velocidad angular? b) ¿Cuál es el radio del círculo que describe? c) ¿Cuál es la aceleración centrípeta?**

210 vueltas en 15 segundos significa que en un segundo da  $210/15 = 14$  vueltas por segundo, es decir:

$f = 14 \text{ rps}$  o Hz y como  $v = 15 \text{ m/s}$ , tenemos que:

De  $f = 1/T \Rightarrow T = 1/f = 1/14 = 0,0714 \text{ s}$

Y de  $\omega = 2\pi/T \Rightarrow \omega = 2\pi/0,0714 \Rightarrow \omega = 88 \text{ rad/s}$

Y como  $v = \omega r \Rightarrow r = v/\omega = 15/88 \Rightarrow r = 0,17 \text{ m}$

Por tanto  $a_c = v^2/r = 15^2/0,17 \Rightarrow a_c = 1323,5 \text{ m/s}^2$

**5) El radio de una rueda de bicicleta es de 32 cm. Si la bicicleta se mueve a  $v$  es de 18 km/h, a) ¿cuál es la velocidad angular? b) ¿Cuál es su periodo? c) ¿Cuántas vueltas da en 2 minutos? d) ¿Cuál es su aceleración centrípeta?**

$r = 0,32 \text{ m}$   $v = 18 \text{ km/h} = 5 \text{ m/s}$

a) Como  $v = \omega r \Rightarrow 5 = \omega \times 0,32 \Rightarrow \omega = 15,6 \text{ rad/s}$

b) De  $\omega = 2\pi/T \Rightarrow 15,6 = 2\pi/T \Rightarrow T = 0,4 \text{ s}$

c) Como el periodo es 0,4 s significa que en 0,4 s da una vuelta, por tanto en 2 minutos (120s) serán:

$120/0,4 = 300 \text{ vueltas}$

d)  $a_c = v^2/r = 5^2/0,32 = 78,1 \text{ m/s}^2$

6) La velocidad lineal de un punto material situado a 0,6 m del centro de giro de un círculo es de 15 m/s y la aceleración centrípeta de un punto situado en el extremo de dicho círculo es de  $75 \text{ m/s}^2$ . Cuál es el radio del círculo?

Tenemos que a un radio de  $r = 0,6 \text{ m}$  la velocidad lineal es  $v = 15 \text{ m/s}$ , por tanto como  $v = \omega r$  tenemos que:  
 $\omega = v/r = 15/0,6 = 25 \text{ rad/s}$  en ese punto, pero como la velocidad angular  $\omega$  es fija, tenemos que al aplicar la aceleración centrípeta en el extremo  $a_c = v^2/r$  pero no conocemos  $v$  ni  $r$  para el extremo, sin embargo como  $v = \omega r \Rightarrow$  al sustituir en  $a_c = v^2/r \Rightarrow a_c = \omega^2 r \Rightarrow 75 = 25^2 r \Rightarrow r = 0,12 \text{ m}$  en el extremo del círculo.

La fórmula  $a_c = \omega^2 r$  es muy empleada, pero tampoco es cuestión de memorizar tantas fórmulas pudiendo obtenerlas a partir de las seis básicas del recuadro inicial a estos ejercicios de movimiento circular.

## MOVIMIENTO PARABÓLICO Y HORIZONTAL

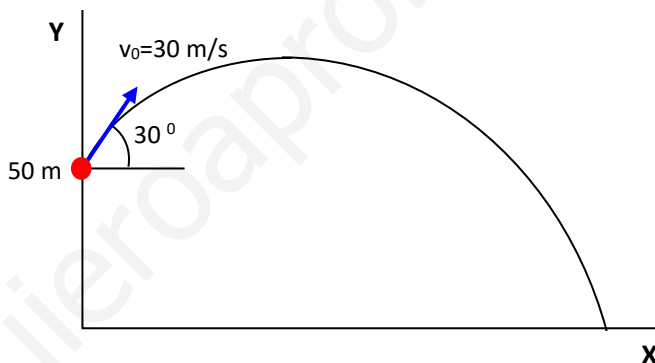
1) Desde lo alto de un acantilado de 50 m de altura se lanza un objeto con una velocidad de 30 m/s y con un ángulo  $30^\circ$ . Determinar: a) altura máxima b) alcance máximo c) ecuación de la trayectoria d) vector de posición e) vector velocidad f) velocidad de impacto g) ángulo de impacto.

a) **Altura máxima:**

Pida lo que se pida calcular lo primero es calcular  $v_{0x}$  y  $v_{0y}$

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 30 \cos 30 = 26 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha = 30 \sin 30 = 15 \text{ m/s}$$



Para altura máxima tenemos que  $V_y = 0$

$$v_y = v_{0y} + gt \rightarrow 0 = 15 - 10t \rightarrow t = 1,5 \text{ s}$$

$$\text{por tanto de } y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow y = 50 + 15 \cdot 1,5 + \frac{1}{2} (-10) \cdot 1,5^2 = 61,25 \text{ m altura máxima.}$$

b) **Alcance máximo:**

El alcance máximo significa que  $y = 0$  (salvo que el cuerpo vaya o deba caer a una altura deterr.....)

$$\text{por tanto de } y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow 0 = 50 + 15t + \frac{1}{2} (-10)t^2 \rightarrow 5t^2 - 15t - 50 = 0 \rightarrow t = 5 \text{ s}$$

$$\text{de } x = x_0 + v_{0x} t \rightarrow x = 0 + 26 \cdot 5 = 130 \text{ m alcance máximo}$$

c) **Ecuación de la trayectoria:**

la ecuación de la trayectoria es obtener la ecuación  $y = f(x)$  correspondiente. Nos indica el valor de  $y$  para cada  $x$

$$\text{De } x = x_0 + v_{0x} t \rightarrow x = 26t \rightarrow t = x/26 \text{ que sustituimos en } y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow y = 50 + 15 \cdot x/26 - 5(x/26)^2$$

$$y = 50 + 0,577x - x^2/135 \text{ es la ecuación de la trayectoria.}$$

d) **Vector de posición:**

El vector de posición es  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  donde  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  son vectores

$$\rightarrow \mathbf{r} = (x_0 + v_{0x} t)\mathbf{i} + (y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2)\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{r} = 26t\mathbf{i} + (50 + 15t - 5t^2)\mathbf{j} \text{ Nos indica la posición para cada valor de } t$$

### e) Vector velocidad:

Es el vector  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$   $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  son vectores.

$$\mathbf{v} = v_{0x} \mathbf{i} + (v_{0y} + gt) \mathbf{j} \rightarrow \mathbf{V} = 26\mathbf{i} + (15 - 10t)\mathbf{j} \quad \text{Nos indica la velocidad vectorial para cada } t.$$

### f) Velocidad de impacto.

Cuando toca el suelo  $y = 0$  (en nuestro caso)

$$\text{Por tanto de } y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2 \quad 0 = 50 + 15t - 5t^2 \quad t = 5 \text{ s (que ya sabíamos al calcular el alcance máximo)}$$

Y las velocidades serán

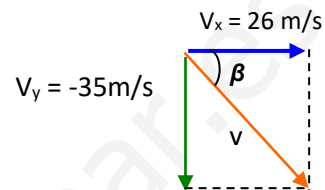
$$v_x = v_{0x} = 26 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_{0y} + gt \rightarrow v_y = 15 - 10 \cdot 5 = -35 \text{ m/s} \quad \text{El signo menos indica que apunta hacia abajo.}$$

Por tanto:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \rightarrow v^2 = 26^2 + (-35)^2 \rightarrow v = -43,6 \text{ m/s}$$

La velocidad es negativa por ser descendente.



La velocidad de impacto es mayor que la de salida ya que tiene que bajar los 50 m iniciales (cuando esté a 50m de altura y bajando, su velocidad será igual a la de salida pero negativa, -30 m/s)

### g) Ángulo de impacto:

Es el ángulo que el vector velocidad forma con la horizontal en el momento de llegar al suelo. Observando la figura del apartado anterior tenemos que:

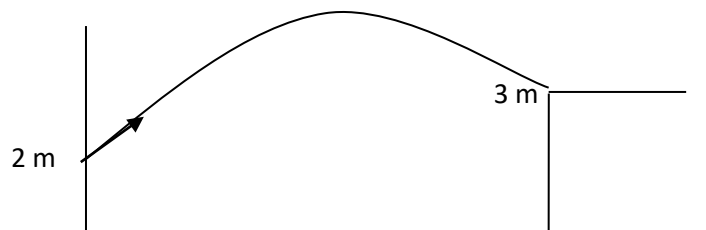
$$\tan \beta = v_y / v_x = (-35) / 26 \rightarrow \beta = -53,4^\circ \quad (\text{el signo negativo indica la dirección del ángulo tal como está calculado})$$

**2) Desde una altura de 2 m se tira un objeto con una velocidad de 18 m/s y un ángulo de 60°. Sabiendo que va a caer sobre una plataforma que está a 3 m del suelo y que se inicia justo en el lugar de impacto, determinar: a) Altura máxima. B) Alcance máximo. C) Ecuación de la trayectoria. D) Vector de posición. E) Vector velocidad. F) Velocidad de impacto. G) Ángulo de impacto.**

En primer lugar calculamos  $v_{0x}$  y  $v_{0y}$ :

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 18 \cos 60 = 9 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha = 18 \sin 60 = 15,6 \text{ m/s}$$



#### a) Altura máxima:

$$\text{Para altura máxima tenemos que } v_y = 0 \Rightarrow v_y = v_{0y} + gt \Rightarrow 0 = 15,6 - 10t \Rightarrow t = 1,56 \text{ s}$$

$$\text{por tanto de } y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y = 2 + 15,6 \cdot 1,56 - \frac{1}{2} (-10) \cdot 1,56^2 = \mathbf{14,2 \text{ m altura máxima.}}$$

#### b) Alcance máximo:

El alcance máximo significa que  $y = 3$  (cae sobre una superficie situada a 3m de altura)

$$\text{por tanto de } y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow 3 = 2 + 15t + \frac{1}{2} (-10)t^2 \rightarrow 5t^2 - 15,6t + 1 = 0 \rightarrow t = 3,05 \text{ s}$$

$$\text{y de } x = x_0 + v_{0x} t \rightarrow x = 0 + 9 \cdot 3,05 = \mathbf{27,45 \text{ m alcance máximo}}$$

### c) Ecuación de la trayectoria:

Recordemos que la ecuación de la trayectoria es obtener la ecuación  $y = f(x)$  correspondiente, para ello despejamos  $t$  de  $x = x_0 + v_{0x}t$  y los sustituimos en  $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$

De  $x = x_0 + v_{0x}t \rightarrow x = 9t \rightarrow t = x/9$  que sustituimos en  $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow y = 2 + 15,6 \cdot x/9 - 5(x/9)^2$

$$y = 2 + 1,73x - x^2/16,2 \quad \text{es la ecuación de la trayectoria.}$$

### d) Vector de posición:

El vector de posición viene dado por  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  donde  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  son vectores.  $\rightarrow$

$$\mathbf{r} = (x_0 + v_{0x}t)\mathbf{i} + (y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2)\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{r} = 9t\mathbf{i} + (2 + 15,6t - 5t^2)\mathbf{j} \quad \text{Nos indica la posición para cada valor de } t$$

### e) Vector velocidad:

Es el vector  $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$  donde  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  son vectores. Y como  $v_x$  es constante e igual a  $v_{0x}$  y  $v_y = v_{0y} + at$

$$\mathbf{v} = v_{0x}\mathbf{i} + (v_{0y} + gt)\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{v} = 9\mathbf{i} + (15,6 - 10t)\mathbf{j} \quad \text{Nos indica la velocidad vectorial para cada } t.$$

### f) Velocidad de impacto.

Cuando toca el suelo  $y = 3$  (en nuestro caso). Por tanto:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 3 = 2 + 15,6t - 5t^2 \quad t = 3,05 \text{ s (que ya sabíamos al calcular el alcance máximo)}$$

Y las velocidades serán:

$$v_x = v_{0x} = 9 \text{ m/s}$$

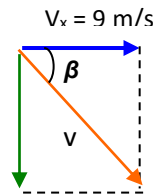
$$v_y = v_{0y} + gt \rightarrow v_y = 15,6 - 10 \cdot 3,05 = -14,9 \text{ m/s} \quad \text{El signo menos indica que está bajando.}$$

Y en módulo:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \rightarrow v^2 = 9^2 + (-14,9)^2 \rightarrow v = -17,4 \text{ m/s}$$

$$v_y = -14,9 \text{ m/s}$$

La velocidad de impacto es menor que la de salida ya que cae por encima de los 2m de la salida.



### g) Ángulo de impacto:

Es el ángulo que el vector velocidad forma con la horizontal en el momento de llegar al suelo. Observando la figura del apartado anterior tenemos que:

$\tan \beta = v_y/v_x = (-14,9)/9 \rightarrow \beta = -58,9^\circ$  (el signo negativo indica la dirección del ángulo tal como está calculado). El ángulo es algo menos inclinado que el original del tiro puesto que cae sobre una superficie al superior a la inicial del tiro.

**Lo que hemos resuelto es lo típico o fundamental de un tiro parabólico. Veamos ahora algunas cuestiones que se pueden plantear (entre muchas otras posibles).**

**A) En su trayectoria se va a encontrar con un objeto que está sobre el suelo a 5m antes del impacto y mide 8m de altura. ¿Chocará o lo sobrepasará?**

Para esto emplearemos la ecuación de la trayectoria. Si en un ejercicio nos piden algo semejante a esto y no nos han pedido la ecuación de la trayectoria, tendremos que obtenerla, ya que cualquier otro intento será más largo y complicado.

Si está a 5m antes del impacto su posición será  $27,45$  (alcance)  $- 5 = 22,45\text{m}$

Por tanto de:  $y = 2 + 1,73x - x^2/16,2 \Rightarrow y = 2 + 1,73 \cdot 22,45 - 22,45^2/16,2 = 9,7\text{m}$  Por tanto **sobrepasa los 8m del objeto.**

**B) ¿A qué distancia horizontal del origen se encuentra cuando está en la altura máxima?**

Cuando está al altura máxima tenemos  $t = 1,56 \text{ s}$  por tanto:

$$x = x_0 + vt = 0 + 9 \cdot 1,56 = 14,04 \text{ m}$$

### C) ¿Cuándo está a 5m de altura qué velocidad neta lleva el objeto?

Usaremos el vector velocidad  $\mathbf{v} = 9\mathbf{i} + (15,6 - 10t)\mathbf{j}$  pero necesitamos conocer  $t$  y para eso usaremos:  
de  $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow 5 = 2 + 15,6t - 5t^2 \rightarrow 5t^2 - 15,6t + 3 = 0 \rightarrow t = 2,91s$  y  $0,206s$ . Dos tiempos porque cuando está a 5m de altura puede estar subiendo (0,2s) o ya bajando (2,9s). Por tanto:

$$\text{De } \mathbf{v} = 9\mathbf{i} + (15,6 - 10t)\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{v} = 9\mathbf{i} + (15,6 - 10 \times 0,206)\mathbf{j} = 9\mathbf{i} + 13,5\mathbf{j} \rightarrow v = \sqrt{9^2 + 13,5^2} = 16,2 \text{ m/s}$$
$$\text{O bien: } \mathbf{v} = 9\mathbf{i} + (15,6 - 10t)\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{v} = 9\mathbf{i} + (15,6 - 10 \times 2,91)\mathbf{j} = 9\mathbf{i} - 13,5\mathbf{j} \rightarrow v = \sqrt{9^2 + (-13,5)^2} = 16,2 \text{ m/s}$$

Las dos velocidades son iguales (como era de esperar) pero para la segunda hemos usado la solución negativa puesto que está bajando.

### 3) Un helicóptero vuela a una altura de 200 m con una velocidad de 180 km/h. a que distancia (horizontal) debe soltar un paquete para que caiga en el punto deseado.

**Determina: A) Vector velocidad. B) Velocidad de impacto. C) Vector de posición. D) Ecuación de la trayectoria.**

$$\text{A) } v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha = 50 \cdot \cos 0 = 50 \quad v_{0y} = v_0 \cdot \sin 90 = 0$$

El vector velocidad viene dado por:  $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$  donde  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  son vectores. Siendo  $v_x = v_{0x}$  (cte.) y  $v_y = v_{0y} + at$

$$\mathbf{v} = v_{0x}\mathbf{i} + (v_{0y} + gt)\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{v} = 50\mathbf{i} - 10t\mathbf{j}$$

B) Para que el paquete caiga en el punto deseado, significa que debe soltarlo a una distancia antes del destino, igual al alcance máximo. Por tanto, lo que tenemos que calcular es el alcance máximo al soltar el paquete.

Ya se ha explicado en clase (de forma teórica y práctica) que al soltar algo desde un móvil que se mueve horizontalmente con velocidad  $V$ , el objeto que se suelta lleva esa misma velocidad horizontal  $V$  y velocidad vertical inicial cero. En nuestro caso el objeto se está moviendo con velocidad  $v = 180 \text{ km/h} = 50 \text{ m/s}$ , por tanto:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha = 50 \cdot \cos 0 = 50 \quad v_{0y} = v_0 \cdot \sin 90 = 0 \quad \text{como acabamos de comentar.}$$

Calculemos ahora el alcance máximo:

En el alcance máximo tenemos, en nuestro caso, que  $y = 0$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 0 = 200 - 5t^2 \Rightarrow t = 6,32 \text{ s}$$

alcance:  $x = x_0 + vt = 0 + 50 \cdot 6,32 = 316 \Rightarrow$  debe soltarse a una distancia de **316 m** antes del destino.

Veamos ahora la velocidad de impacto:

$$\text{Calculemos la } v_y: v_y = v_{0y} + at = 0 - 10 \cdot 6,32 = -63,2 \text{ m/s}$$

Por tanto, la velocidad vectorial será  $\mathbf{v} = 50\mathbf{i} - 63,2\mathbf{j}$  y el módulo será  $v^2 = 50^2 + (-63,2)^2 \Rightarrow \mathbf{v} = 80,6 \text{ m/s}$

Hemos calculado la velocidad aplicando el módulo de la velocidad vectorial, en lugar de Pitágoras con  $v_x$  y  $v_y$  como hemos hecho en otros casos (comprueba que es lo mismo).

C) El vector de posición viene dado por  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  donde  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  son vectores.  $\rightarrow$

$$\mathbf{r} = (x_0 + v_{0x}t)\mathbf{i} + (y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2)\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{r} = 50t\mathbf{i} + (200 - 5t^2)\mathbf{j}$$

D) La ecuación de la trayectoria es la ecuación  $y = f(x)$  correspondiente, para ello despejamos  $t$  de  $x = x_0 + v_{0x}t$  y los sustituimos en  $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$  de nuestro caso.

$$\text{De } x = x_0 + v_{0x}t \rightarrow x = 50t \rightarrow t = x/50 \quad \text{que sustituimos en } y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow y = 200 + 0 - 5(x/50)^2$$

$$\mathbf{y} = 200 - \frac{x^2}{50} \quad \text{es la ecuación de la trayectoria.}$$