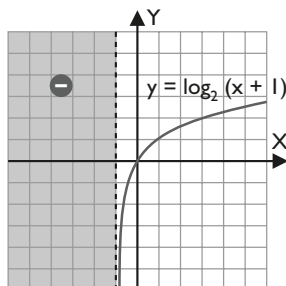




1. Análisis gráfico de una función

● Aplica la teoría

1. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.

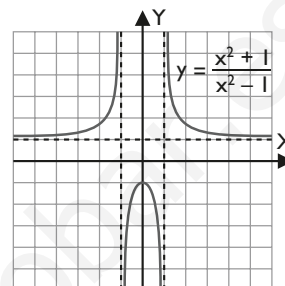


Solución:

1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (-1, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = -1$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-1, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(-1, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $\emptyset$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $\emptyset$
 - Cóncava ($\cap$): $(-1, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

2. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = -1, x = 1$
 - Horizontales: $y = 1$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: $A(0, -1)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(0, -1)$
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-1, 1)$
10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$$

2. Análisis de funciones polinómicas

■ Piensa y calcula

Halla los puntos de corte con el eje X de la función $y = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$ y estudia su multiplicidad.

Solución:

$$2x^2 - \frac{x^4}{4} = 0 \Rightarrow 8x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow (8 - x^2)x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ doble.} \\ x = 2\sqrt{2} \text{ simple.} \\ x = -2\sqrt{2} \text{ simple.} \end{cases}$$

● Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

3. $y = x^3 - 4x$

Solución:

$$y' = 3x^2 - 4$$

$$y'' = 6x$$

$$y''' = 6$$

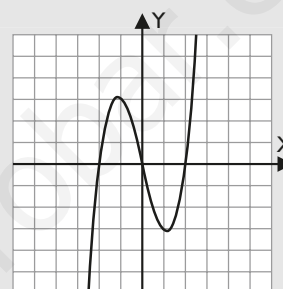
1. Tipo de función: polinómica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-2, 0)$, $O(0, 0)$, $B(2, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

 - Positiva (+): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(-2\sqrt{3}/3, 16\sqrt{3}/9)$
 - Mínimo relativo: $B(2\sqrt{3}/3, -16\sqrt{3}/9)$

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -2\sqrt{3}/3) \cup (2\sqrt{3}/3, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3)$
 9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

4. $y = 3x - x^3$

Solución:

$$y' = 3 - 3x^2$$

$$y'' = -6x$$

$$y''' = -6$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-\sqrt{3}, 0)$, $O(0, 0)$, $B(\sqrt{3}, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

 - Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
 - Negativa (-): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(1, 2)$
 - Mínimo relativo: $B(-1, -2)$

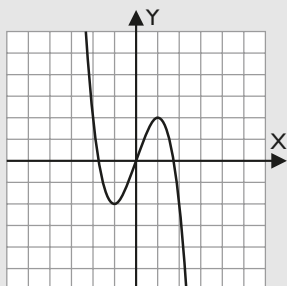
Monotonía:

- Creciente ($\nearrow$): $(-1, 1)$
- Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $(-\infty, 0)$
- Cóncava ($\cap$): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

5. $y = x^3$

Solución:

$$y' = 3x^2$$

$$y'' = 6x$$

$$y''' = 6$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $O(0, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

- Positiva (+): $(0, +\infty)$
- Negativa (-): $(-\infty, 0)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: no tiene.

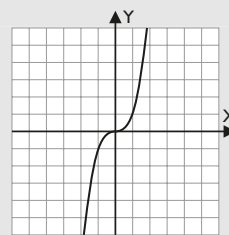
Monotonía:

- Creciente ($\nearrow$): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Decreciente ($\searrow$): $\emptyset$

9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$
- Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

6. $y = 4x^2 - x^4$

Solución:

$$y' = 8x - 4x^3$$

$$y'' = 8 - 12x^2$$

$$y''' = -24x$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $A(-2, 0)$, $O(0, 0)$, $B(2, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

- Positiva (+): $(-2, 0) \cup (0, 2)$
- Negativa (-): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $C(-\sqrt{2}, 4)$, $D(\sqrt{2}, 4)$
- Mínimo relativo: $O(0, 0)$

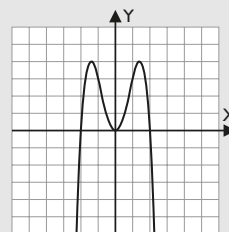
Monotonía:

- Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$
- Decreciente ($\searrow$): $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $E(-\sqrt{6}/3, 20/9)$, $F(\sqrt{6}/3, 20/9)$

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $(-\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3)$
- Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -\sqrt{6}/3) \cup (\sqrt{6}/3, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 4]$$

7. $y = x^4 - 2x^3$

Solución:

$$y' = 4x^3 - 6x^2$$

$$y'' = 12x^2 - 12x$$

$$y''' = 24x - 12$$

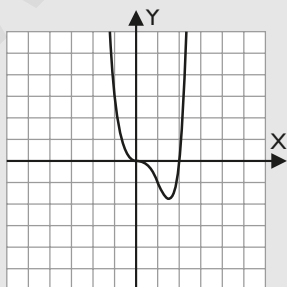
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0), A(2, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

 - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
 - Negativa (-): $(0, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $B(3/2, -27/16)$

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(3/2, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, 3/2)$
9. Puntos de inflexión: $C(0, 0), D(1, -1)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-27/16, +\infty)$$

8. $y = \frac{x^3}{3} - 4x$

Solución:

$$y' = x^2 - 4$$

$$y'' = 2x$$

$$y''' = 2$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-2\sqrt{3}, 0), O(0, 0), B(2\sqrt{3}, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

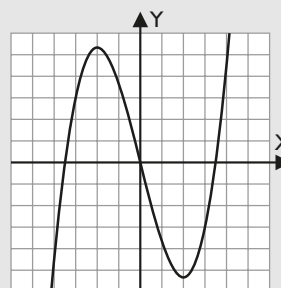
 - Positiva (+): $(-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(-2, 16/3)$
 - Mínimo relativo: $B(2, -16/3)$

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-2, 2)$
9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$
- Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

3. Análisis de funciones racionales

■ Piensa y calcula

Halla mentalmente las raíces del denominador de la función $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

Solución:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$$

● Aplica la teoría

9. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

Solución:

$$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$y'' = \frac{2}{x^3}$$

$$y''' = -\frac{6}{x^4}$$

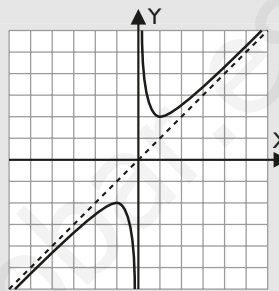
1. Tipo de función: racional.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
 6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = x$
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: no lo corta.

Signo:

 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(-1, -2)$
 - Mínimo relativo: $B(1, 2)$

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-1, 0) \cup (0, 1)$
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

10. $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

Solución:

$$y' = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$$y'' = -\frac{2}{x^3}$$

$$y''' = \frac{6}{x^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = x$
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-1, 0), B(1, 0)$
 - Eje Y: no lo corta.

Signo:

 - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.

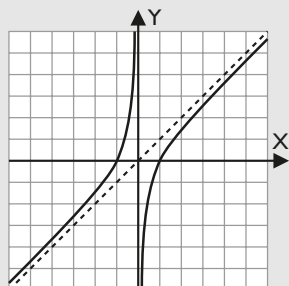
Monotonía:

- Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Decreciente ($\searrow$): $\emptyset$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $(-\infty, 0)$
- Cóncava ($\cap$): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

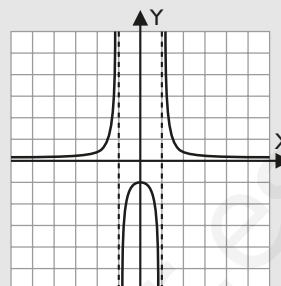
Monotonía:

- Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
- Decreciente ($\searrow$): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Cóncava ($\cap$): $(-1, 1)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$$

$$11. y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Solución:

$$y' = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{24x^3 + 24x}{(x^2 - 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.

2. Dominio:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

3. Continuidad: es discontinua en $x = -1$, $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas:

- Verticales: $x = -1$, $x = 1$
- Horizontales: $y = 0$
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: no lo corta.
- Eje Y: A(0, -1)

Signo:

- Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Negativa (-): $(-1, 1)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(0, -1)
- Mínimo relativo: no tiene.

$$12. y = \frac{x-1}{x^2}$$

Solución:

$$y' = -\frac{x-2}{x^3}$$

$$y'' = \frac{2x-6}{x^4}$$

$$y''' = -\frac{6x-24}{x^5}$$

1. Tipo de función: racional.

2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)

6. Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$
- Horizontales: $y = 0$
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: A(1, 0)
- Eje Y: no lo corta.

Signo:

- Positiva (+): $(1, +\infty)$
- Negativa (-): $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(2, 1/4)
- Mínimo relativo: no tiene.

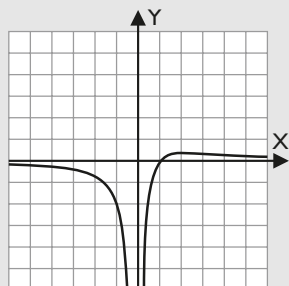
Monotonía:

- Creciente ($\nearrow$): $(0, 2)$
- Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

9. Punto de inflexión: $B(3, 2/9)$

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $(3, +\infty)$
- Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 1/4]$$

13. $y = \frac{3x}{x^2 + 1}$

Solución:

$$y' = -\frac{3x^2 - 3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^3 - 18x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{18x^4 - 108x^2 + 18x}{(x^2 + 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(1, 3/2)$
 - Mínimo relativo: $B(-1, -3/2)$

Monotonía:

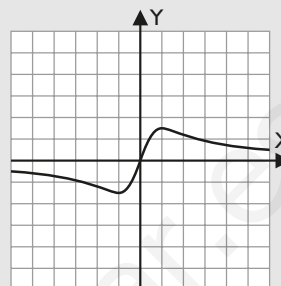
- Creciente ($\nearrow$): $(-1, 1)$
- Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión:

$$O(0, 0), C(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/4), D(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/4)$$

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
- Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-3/2, 3/2]$$

14. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

Solución:

$$y' = -\frac{6x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y'' = \frac{18x^2 + 24}{(x^2 - 4)^3}$$

$$y''' = -\frac{72x^3 + 288x}{(x^2 - 4)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -2$, $x = 2$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = -2$, $x = 2$
 - Horizontales: $y = 1$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$
 - Eje Y: $C(0, 1/4)$

Signo:

 - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-2, -1) \cup (1, 2)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $C(0, 1/4)$
- Mínimo relativo: no tiene.

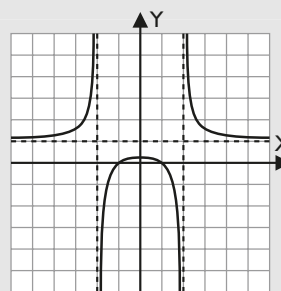
Monotonía:

- Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
- Decreciente ($\searrow$): $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
- Cóncava ($\cap$): $(-2, 2)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 1/4] \cup (1, +\infty)$$

4. Análisis de funciones irracionales

■ Piensa y calcula

Halla mentalmente el dominio de la función $y = \sqrt{x^2 - 4}$

Solución:

$$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4$$

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

● Aplica la teoría

15. $y = \sqrt{4 - x}$

Solución:

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$$

$$y'' = -\frac{1}{4(4-x)\sqrt{4-x}}$$

$$y''' = -\frac{3}{8(4-x)^2\sqrt{4-x}}$$

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (-\infty, 4]$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = 4$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(4, 0)$
 - Eje Y: $B(0, 2)$

Signo:

- Positiva (+): $(-\infty, 4)$
- Negativa (-): $\emptyset$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: no tiene.

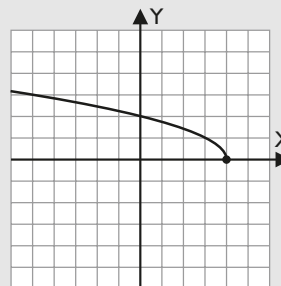
Monotonía:

- Creciente ($\nearrow$): $\emptyset$
- Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, 4)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $\emptyset$
- Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 4)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [0, +\infty)$$

16. $y = \sqrt{x^2 + 4}$

Solución:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$y'' = \frac{4}{(x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$y''' = -\frac{12x}{(x^2 + 4)^2\sqrt{x^2 + 4}}$$

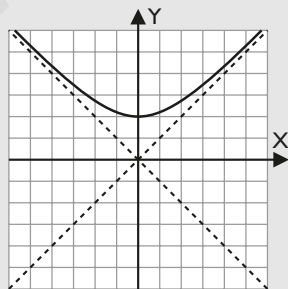
1. Tipo de función: irracional.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en toda la real $\mathbb{R}$
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = -x, y = x$
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: A(0, 2)

Signo:

 - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: A(0, 2)

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(0, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, 0)$
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa (U): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Cóncava (∩): $\emptyset$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [2, +\infty)$

17. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

Solución:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y'' = -\frac{1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y''' = \frac{3x}{(x^2 - 1)^2\sqrt{x^2 - 1}}$$

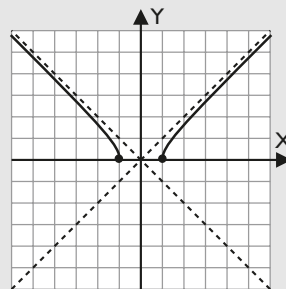
1. Tipo de función: irracional.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -1, x = 1$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = -x, y = x$
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: A(-1, 0), B(1, 0)
 - Eje Y: no lo corta.

Signo:

 - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(1, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -1)$
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa (U): $\emptyset$
 - Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

18. $y = \sqrt{4 - x^2}$

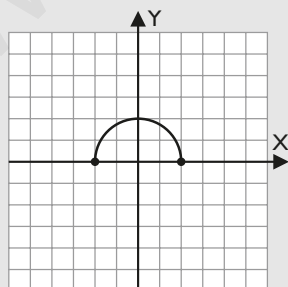
Solución:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$y'' = -\frac{4}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}}$$

$$y''' = -\frac{12x}{(4 - x^2)^2\sqrt{4 - x^2}}$$

1. Tipo de función: irracional.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = [-2, 2]$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -2, x = 2$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: A(-2, 0), B(2, 0)
 - Eje Y: C(0, 2)
 Signo:
 - Positiva (+): (-2, 2)
 - Negativa (-): $\emptyset$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: C(0, 2)
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): (-2, 0)
 - Decreciente ($\searrow$): (0, 2)
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $\emptyset$
 - Cóncava ($\cap$): (-2, 2)



Es una semicircunferencia.

10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [0, 2]$

19. $y = \sqrt[3]{x}$

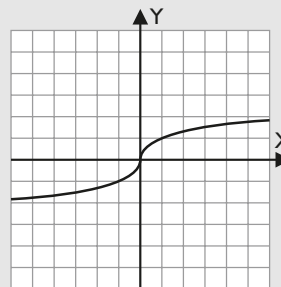
Solución:

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$y'' = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

$$y''' = \frac{10}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$$

1. Tipo de función: irracional.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en toda la recta real.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: O(0, 0)
 - Eje Y: O(0, 0)
 Signo:
 - Positiva (+): (0, $+\infty$)
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $\emptyset$
 9. Punto de inflexión: O(0, 0)
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $(-\infty, 0)$
 - Cóncava ($\cap$): (0, $+\infty$)



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

20. $y = x\sqrt{4-x^2}$

Solución:

$$y' = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$y'' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{x^3-8x}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

$$y''' = -\frac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} - \frac{4x^2+32}{(4-x^2)^2\sqrt{4-x^2}}$$

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = [-2, 2]$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -2, x = 2$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-2, 0), O(0, 0), B(2, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(0, 2)$
 - Negativa (-): $(-2, 0)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $C(\sqrt{2}, 2)$
- Mínimo relativo: $D(-\sqrt{2}, -2)$

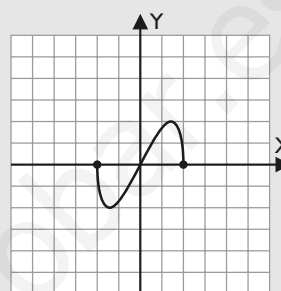
Monotonía:

- Creciente ($\nearrow$): $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
- Decreciente ($\searrow$): $(-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$

9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $(-2, 0)$
- Cóncava ($\cap$): $(0, 2)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-2, 2]$$

5. Análisis de funciones exponenciales

■ Piensa y calcula

Halla mentalmente los puntos de corte con los ejes de la función $y = (2-x)e^x$

Solución:

Eje X: $A(2, 0)$

Eje Y: $B(0, 2)$

● Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

21. $y = (x-2)e^x$

Solución:

$$y' = (x-1)e^x$$

$$y'' = xe^x$$

$$y''' = (x+1)e^x$$

1. Tipo de función: polinómica por exponencial.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: $y = 0$
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $A(2, 0)$
- Eje Y: $B(0, -2)$

Signo:

- Positiva (+): $(2, +\infty)$
- Negativa (-): $(-\infty, 2)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $C(1, -e)$

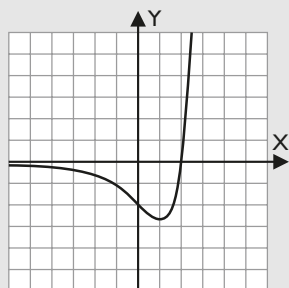
Monotonía:

- Creciente ($\nearrow$): $(1, +\infty)$
- Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, 1)$

9. Punto de inflexión: $B(0, -2)$

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$
- Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-e, +\infty)$$

22. $y = xe^{-x}$

Solución:

$$y' = -(x-1)e^{-x}$$

$$y'' = (x-2)e^{-x}$$

$$y''' = -(x-3)e^{-x}$$

1. Tipo de función: polinómica por exponencial.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(1, 1/e)$
 - Mínimo relativo: no tiene.

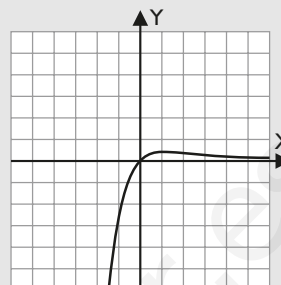
Monotonía:

- Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 1)$
- Decreciente ($\searrow$): $(1, +\infty)$

9. Punto de inflexión: $B(2, 2/e^2)$

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $(2, +\infty)$
- Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 2)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 1/e]$$

23. $y = \frac{e^x}{x}$

Solución:

$$y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$y'' = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$$

$$y''' = \frac{e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)}{x^4}$$

1. Tipo de función: exponencial dividida por polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: no lo corta.

Signo:

 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $A(1, e)$

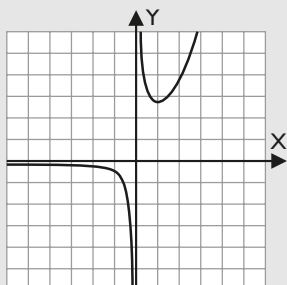
Monotonía:

- Creciente ($\nearrow$): $(1, +\infty)$
- Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$
- Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$$

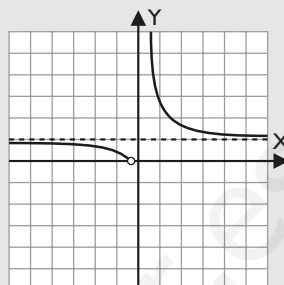
Monotonía:

- Creciente ($\nearrow$): $\emptyset$
- Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

9. Punto de inflexión: $A(-1/2, 1/e^2)$

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $(-1/2, 0) \cup (0, +\infty)$
- Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -1/2)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

24. $y = e^{1/x}$

Solución:

$$y' = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

$$y'' = \frac{e^{1/x}(2x + 1)}{x^4}$$

$$y''' = -\frac{e^{1/x}(6x^2 + 6x + 1)}{x^6}$$

1. Tipo de función: exponencial.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
 6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: $y = 1$
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
- Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.

25. $y = e^{-x^2}$

Solución:

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

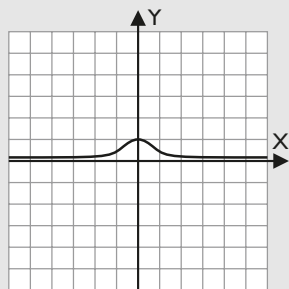
$$y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

$$y''' = -(2x^2 - 3)4xe^{-x^2}$$

1. Tipo de función: exponencial.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo su dominio.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: $A(0, 1)$
- Signo:
- Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(0, 1)$
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
- Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 0)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $B(-\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{e})$, $C(\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{e})$

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $(-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty)$
- Cóncava ($\cap$): $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (0, 1]$$

26. $y = \frac{e^x}{x^2}$

Solución:

$$y' = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$$

$$y'' = \frac{(x^2 - 4x + 6)e^x}{x^4}$$

$$y''' = \frac{(x^3 - 6x^2 + 18x - 24)e^x}{x^5}$$

1. Tipo de función: exponencial dividida por polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$
- Horizontales: $y = 0$
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: no lo corta.
- Eje Y: no lo corta.

Signo:

- Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Negativa (-): $\emptyset$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $A(2, e^2/4)$

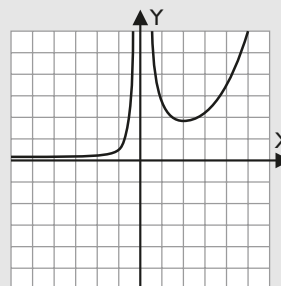
Monotonía:

- Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
- Decreciente ($\searrow$): $(0, 2)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Cóncava ($\cap$): $\emptyset$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (0, +\infty)$$

6. Análisis de funciones logarítmicas

■ Piensa y calcula

Halla los puntos de corte con los ejes de la función $y = L(x^2 - 1)$

Solución:

Puntos de corte con el eje X

$$L(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2$$

$$A(-\sqrt{2}, 0); B(\sqrt{2}, 0)$$

Al eje Y no lo corta.

● Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

27. $y = L(x^2 + 4)$

Solución:

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 - 8}{(x^2 + 4)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 - 48x}{(x^2 + 4)^3}$$

1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: A(0, L 4)

Signo:

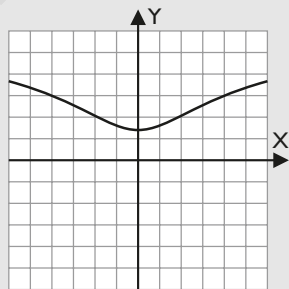
 - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: A(0, L 4)

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(0, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: B(-2, L 8), C(2, L 8)

Curvatura:

- Convexa (U): $(-2, 2)$
- Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [L 4, +\infty)$$

28. $y = L(x^2 - 3x + 2)$

Solución:

$$y' = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 - 6x + 5}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 - 18x^2 + 30x - 18}{(x^2 - 3x + 2)^3}$$

1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = 1$, $x = 2$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 1$, $x = 2$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 0\right), \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, 0\right)$
 - Eje Y: (0, L 2)

Signo:

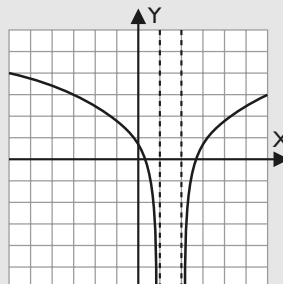
 - Positiva (+): $\left(-\infty, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$
 - Negativa (-): $\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup \left(2, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(2, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, 1)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (U): $\emptyset$
- Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

29. $y = L x^2$

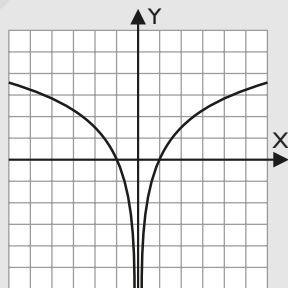
Solución:

$$y' = \frac{2}{x}$$

$$y'' = -\frac{2}{x^2}$$

$$y''' = \frac{4}{x^3}$$

1. Tipo de función: logarítmica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: A(-1, 0), B(1, 0)
 - Eje Y: no lo corta.
 Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-1, 0) \cup (0, 1)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(0, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, 0)$
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $\emptyset$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

30. $y = x L x$

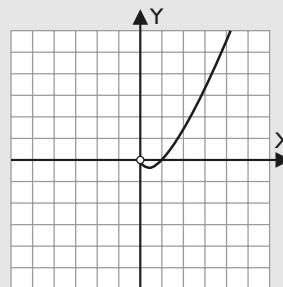
Solución:

$$y' = 1 + L x$$

$$y'' = \frac{1}{x}$$

$$y''' = -\frac{1}{x^2}$$

1. Tipo de función: polinómica multiplicada por logarítmica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = 0$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: A(1, 0)
 - Eje Y: no lo corta.
 Signo:
 - Positiva (+): $(1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(0, 1)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: B(1/e, -1/e)
 Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(1/e, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(0, 1/e)$
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $\emptyset$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [-1/e, +\infty)$

$$31. y = \frac{Lx}{x}$$

Solución:

$$y' = \frac{1 - Lx}{x^2}$$

$$y'' = -\frac{3 - 2Lx}{x^3}$$

$$y''' = \frac{11 - 6Lx}{x^4}$$

1. Tipo de función: logarítmica dividida entre polinómica.

2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$

3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición.

4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$
- Horizontales: $y = 0$
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $A(1, 0)$
- Eje Y: no lo corta.

Signo:

- Positiva (+): $(1, +\infty)$
- Negativa (-): $(0, 1)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $B(e, 1/e)$
- Mínimo relativo: no tiene.

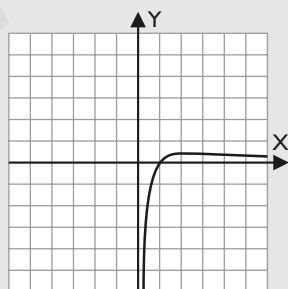
Monotonía:

- Creciente ($\nearrow$): $(0, e)$
- Decreciente ($\searrow$): $(e, +\infty)$

9. Punto de inflexión: $C\left(e^{3/2}, \frac{3}{2e^{3/2}}\right)$

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $(e^{3/2}, +\infty)$
- Cóncava ($\cap$): $(0, e^{3/2})$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 1/e]$$

$$32. y = L(1 - x^2)$$

Solución:

$$y' = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 + 12x}{(x^2 - 1)^3}$$

1. Tipo de función: logarítmica.

2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (-1, 1)$

3. Continuidad: es continua en todo su dominio; en $x = -1, x = 1$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.

4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas:

- Verticales: $x = -1, x = 1$
- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $O(0, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

- Positiva (+): $\emptyset$
- Negativa (-): $(-1, 0) \cup (0, 1)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $O(0, 0)$
- Mínimo relativo: no tiene.

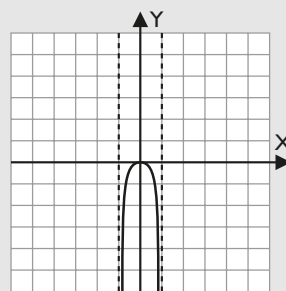
Monotonía:

- Creciente ($\nearrow$): $(-1, 0)$
- Decreciente ($\searrow$): $(0, 1)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa ($\cup$): $\emptyset$
- Cóncava ($\cap$): $(-1, 1)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 0]$$

7. Análisis de funciones trigonométricas

■ Piensa y calcula

Halla mentalmente el período de la función $y = 3 \operatorname{sen} 2x$

Solución:

Si el período de $y = \operatorname{sen} x$ es 2π , para hallar el de $y = \operatorname{sen} 2x$ hay que dividir 2π entre 2; por tanto, el período es π

● Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

33. $y = 3 \cos x/2$

Solución:

$$y' = -\frac{3 \operatorname{sen} x/2}{2}$$

$$y'' = -\frac{3 \cos x/2}{4}$$

$$y''' = \frac{3 \operatorname{sen} x/2}{8}$$

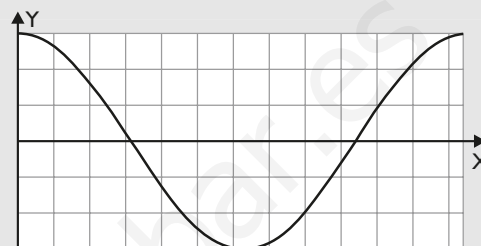
1. Tipo de función: trigonométrica.
 2. Dominio: $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
 4. Periodicidad: es periódica de período 4π ; se estudia solo en el primer período $[0, 4\pi)$
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: A(π , 0), B(3π , 0)
 - Eje Y: C(0, 3)

Signo:

 - Positiva (+): $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$
 - Negativa (-): $(\pi, 3\pi)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: C(0, 3)
 - Mínimo relativo: D(2π , -3)

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(2\pi, 4\pi)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(0, 2\pi)$
 9. Puntos de inflexión: A(π , 0), B(3π , 0)
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $(\pi, 3\pi)$
 - Cóncava ($\cap$): $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$



10. Recorrido o imagen:

$$\operatorname{Im}(f) = [-3, 3]$$

34. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$

Solución:

$$y' = \cos x - \operatorname{sen} x$$

$$y'' = -\operatorname{sen} x - \cos x$$

$$y''' = -\cos x + \operatorname{sen} x$$

1. Tipo de función: trigonométrica.
2. Dominio: $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: es periódica de período 2π ; se estudia solo en el primer período $[0, 2\pi)$
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: A($3\pi/4$, 0), B($7\pi/4$, 0)
 - Eje Y: C(0, 1)

Signo:

 - Positiva (+): $(0, 3\pi/4) \cup (7\pi/4, 2\pi)$
 - Negativa (-): $(3\pi/4, 7\pi/4)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: D($\pi/4$, $\sqrt{2}$)
 - Mínimo relativo: E($5\pi/4$, $-\sqrt{2}$)

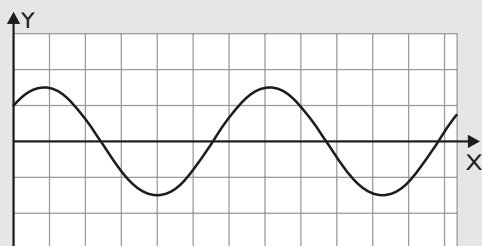
Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(0, \pi/4) \cup (5\pi/4, 2\pi)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(\pi/4, 5\pi/4)$

9. Puntos de inflexión: A(3π/4, 0), B(7π/4, 0)

Curvatura:

- Convexa (∪): (3π/4, 7π/4)
- Cóncava (∩): (0, 3π/4) ∪ (7π/4, 2π)



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

35. $y = \cos^2 x$

Solución:

$$y' = -2 \sin x \cos x$$

$$y'' = 2 - 4 \cos^2 x$$

$$y''' = 8 \sin x \cos x$$

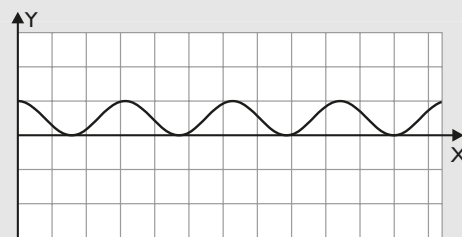
1. Tipo de función: trigonométrica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
 4. Periodicidad: es periódica de período π ; se estudia solo en el primer período $[0, \pi]$
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: A(π/2, 0)
 - Eje Y: B(0, 1)

Signo:

 - Positiva (+): $(0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: B(0, 1)
 - Mínimo relativo: C(π/2, 0)

Monotonía:

 - Creciente (↗): $(\pi/2, \pi)$
 - Decreciente (↘): $(0, \pi/2)$
 9. Puntos de inflexión: D(π/4, 1/2), E(3π/4, 1/2)
- Curvatura:
- Convexa (∪): $(\pi/4, 3\pi/4)$
 - Cóncava (∩): $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [0, 1]$$

36. $y = \sin x \cos x$

Solución:

$$y' = -1 + 2 \cos^2 x$$

$$y'' = -4 \sin x \cos x$$

$$y''' = 4 - 8 \cos^2 x$$

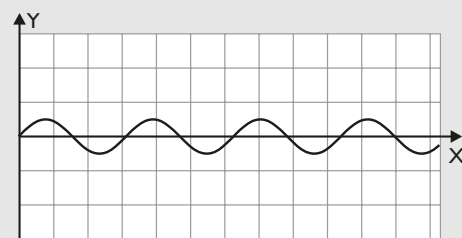
1. Tipo de función: trigonométrica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
 4. Periodicidad: es periódica de período π ; se estudia solo en el primer período $[0, \pi]$
 5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: A(π/2, 0), O(0, 0)
 - Eje Y: O(0, 0)

Signo:

 - Positiva (+): $(0, \pi/2)$
 - Negativa (-): $(\pi/2, \pi)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: B(π/4, 1/2)
 - Mínimo relativo: C(3π/4, -1/2)

Monotonía:

 - Creciente (↗): $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$
 - Decreciente (↘): $(\pi/4, 3\pi/4)$
 9. Puntos de inflexión: O(0, 0), D(π/2, 0)
- Curvatura:
- Convexa (∪): $(\pi/2, \pi)$
 - Cóncava (∩): $(0, \pi/2)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-1/2, 1/2]$$

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 Dada la función:

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

halla los máximos y mínimos relativos.

- ☐ Máximo A(2, -4), mínimo B(-2, 1)
☐ No tiene.
☒ Máximo A(-2, 4), mínimo O(0, 0)
☐ Máximo A(1, 3), mínimo B(-3, 1)

2 Dada la función:

$$f(x) = x^3 - 9x$$

halla dónde es convexa ($\cup$)

- ☐ $(-\infty, 0)$
☐ $(-\infty, -\sqrt{3})$
☒ $(0, +\infty)$
☐ $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

3 Sea la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Halla los puntos de inflexión.

- ☐ A(-1, 0); B(1, 0)
☐ A(-2, 2); B(2, -2)
☐ No tiene.
☒ O(0, 0)

4 Sea la función:

$$f(x) = \frac{x^2(1-x)}{x^2 - 1}$$

¿Qué tipo de discontinuidad tiene en $x = 1$?

- ☒ Evitable.
☐ De 1ª especie.
☐ De 2ª especie.
☐ No es discontinua.

5 Dada la función:

$$y = x^4 e^{-x}$$

¿dónde tiene el máximo relativo?

- ☐ O(0, 0)
☐ A(2, 2)
☒ A(4, 256/e⁴)
☐ A(-1, 3)

6 Dada la función:

$$f(x) = xe^x$$

halla dónde es creciente.

- ☐ $(-\infty, -1)$
☐ $(-\infty, e)$
☒ $(-1, +\infty)$
☐ $(-e, e)$

7 Dada la función:

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

halla dónde tiene un mínimo relativo.

- ☒ O(0, 0)
☐ A(2, 1)
☐ A(4, 1/e)
☐ A(-1, 2)

8 Dada la función:

$$y = \frac{Lx}{x^2}$$

halla dónde es creciente.

- ☐ $(1, +\infty)$
☒ $(0, \sqrt{e})$
☐ $(-\infty, e)$
☐ $(0, e)$

9 Se consideran las funciones:

$$f(x) = x^2 - 4; g(x) = L f(x)$$

Halla el dominio de $g(x)$

- ☐ Dom(g) = $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
☐ Dom(g) = $(-2, 2)$
☐ Dom(g) = $[-2, 2]$
☒ Dom(g) = $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

10 La función dada por:

$$f(x) = x|x - 2|$$

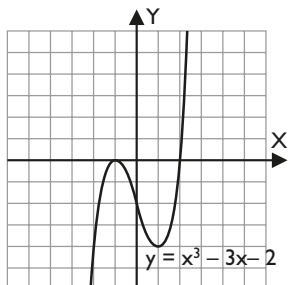
tiene un mínimo relativo en:

- ☒ A(2, 0)
☐ O(0, 0)
☐ A(-2, -8)
☐ A(1, 1)

Ejercicios y problemas

1. Análisis gráfico de una función

37. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

- Tipo de función: polinómica.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$
 - Eje Y: $C(0, -2)$

Signo:

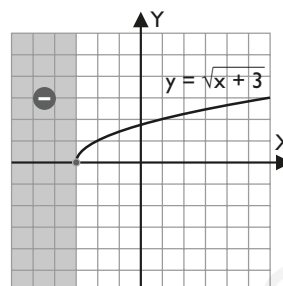
 - Positiva (+): $(2, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, -1) \cup (-1, 2)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(-1, 0)$
 - Mínimo relativo: $D(1, -4)$

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-1, 1)$
- Punto de inflexión: $C(0, -2)$
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0)$
- Recorrido o imagen:

$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

38. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

- Tipo de función: irracional.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = [-3, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio; en $x = -3$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-3, 0)$
 - Eje Y: $C(0, \sqrt{3})$

Signo:

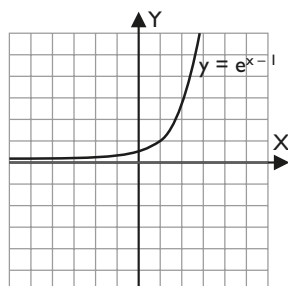
 - Positiva (+): $(-3, +\infty)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(-3, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $\emptyset$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $\emptyset$
 - Cóncava ($\cap$): $(-3, +\infty)$
- Recorrido o imagen:

$\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

39. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.

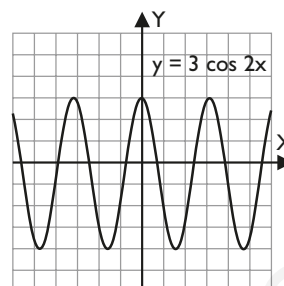


Solución:

1. Tipo de función: exponencial.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: $A(e^{-1}, 0)$
 Signo:
 - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $\emptyset$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $\emptyset$
10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (0, +\infty)$$

40. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

1. Tipo de función: trigonométrica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: es periódica de periodo π ; se estudia solo en el primer periodo $[0, \pi)$
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(\pi/4, 0), B(3\pi/4, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 3)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$
 - Negativa (-): $(\pi/4, 3\pi/4)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $B(0, 3)$
 - Mínimo relativo: $C(\pi/2, -3)$
 Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(\pi/2, \pi)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(0, \pi/2)$
9. Puntos de inflexión: $A(\pi/4, 0), B(3\pi/2, 0)$
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(\pi/4, 3\pi/4)$
 - Cóncava ($\cap$): $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$
10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-3, 3]$$

2. Análisis de funciones polinómicas

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

41. $y = 4x - x^3$

Solución:

$$y' = 4 - 3x^2$$

$$y'' = -6x$$

$$y''' = -6$$

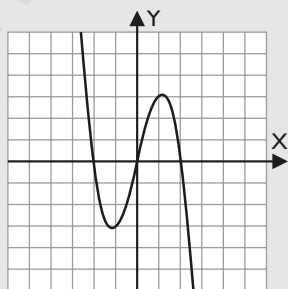
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-2, 0)$, $O(0, 0)$, $B(2, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

 - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
 - Negativa (-): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(2\sqrt{3}/3, 16\sqrt{3}/9)$
 - Mínimo relativo: $B(-2\sqrt{3}/3, -16\sqrt{3}/9)$

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -2\sqrt{3}/3) \cup (2\sqrt{3}/3, +\infty)$
9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(-\infty, 0)$
 - Cóncava ($\cap$): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

42. $y = -x^3 - 3x^2$

Solución:

$$y' = -3x^2 - 6x$$

$$y'' = -6x - 6$$

$$y''' = -6$$

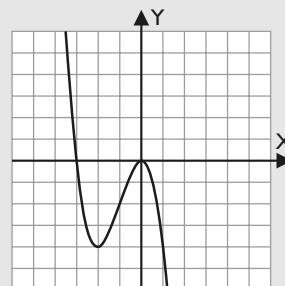
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-3, 0)$, $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

 - Positiva (+): $(-\infty, -3)$
 - Negativa (-): $(-3, 0) \cup (0, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $O(0, 0)$
 - Mínimo relativo: $B(-2, -4)$

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(-2, 0)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
9. Punto de inflexión: $C(-1, -2)$
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(-\infty, -1)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

43. $y = x^3 + x$

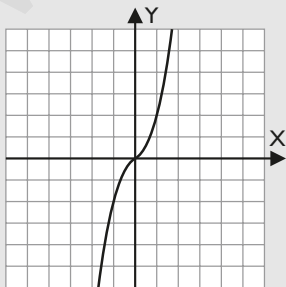
Solución:

$$y' = 3x^2 + 1$$

$$y'' = 6x$$

$$y''' = 6$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $\emptyset$
9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

44. $y = x^4 - 4x^2$

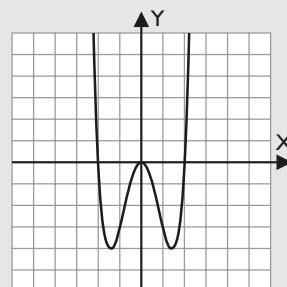
Solución:

$$y' = 4x^3 - 8x$$

$$y'' = 12x^2 - 8$$

$$y''' = 24x$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-2, 0), O(0, 0), B(2, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-2, 0) \cup (0, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $O(0, 0)$
 - Mínimo relativo: $C(-\sqrt{2}, -4), D(\sqrt{2}, -4)$
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$
9. Puntos de inflexión:
 - $E(-\sqrt{6}/3, -20/9), F(\sqrt{6}/3, -20/9)$
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(-\infty, -\sqrt{6}/3) \cup (\sqrt{6}/3, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$

Ejercicios y problemas

45. $y = 2x^3 - x^4$

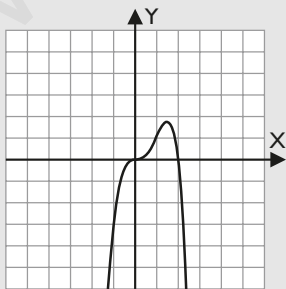
Solución:

$$y' = 6x^2 - 4x^3$$

$$y'' = 12x - 12x^2$$

$$y''' = 12 - 24x$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0), A(2, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(0, 2)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $B(3/2, 27/16)$
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 3/2)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(3/2, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $C(0, 0), D(1, 1)$
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(0, 1)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 27/16]$$

46. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$

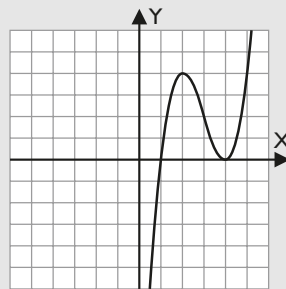
Solución:

$$y' = 3x^2 - 18x + 24$$

$$y'' = 6x - 18$$

$$y''' = 6$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(1, 0), B(4, 0)$
 - Eje Y: $O(0, -16)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(1, 4) \cup (4, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $C(2, 4)$
 - Mínimo relativo: $D(4, 0)$
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(2, 4)$
9. Punto de inflexión: $O(3, 2)$
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(3, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 3)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

3. Análisis de funciones racionales

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

47. $y = \frac{x^2}{x-1}$

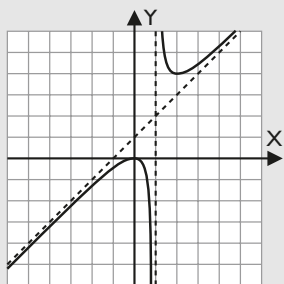
Solución:

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$y''' = -\frac{6}{(x-1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
 3. Continuidad: es discontinua en $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
 6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 1$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = x + 1$
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $O(0, 0)$
 - Mínimo relativo: $A(2, 4)$
 Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(0, 1) \cup (1, 2)$
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $(1, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 1)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

48. $y = \frac{x^2 - 4}{x}$

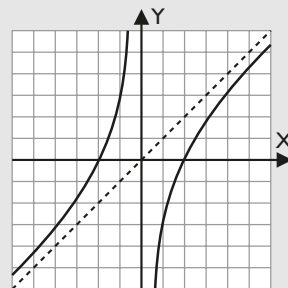
Solución:

$$y' = \frac{x^2 + 4}{x^2}$$

$$y'' = -\frac{8}{x^3}$$

$$y''' = \frac{24}{x^4}$$

1. Tipo de función: racional.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
 6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = x$
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-2, 0), B(2, 0)$
 - Eje Y: no lo corta.
 Signo:
 - Positiva (+): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $\emptyset$
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $(-\infty, 0)$
 - Cóncava ($\cap$): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Ejercicios y problemas

49. $y = \frac{3}{x^2 + 1}$

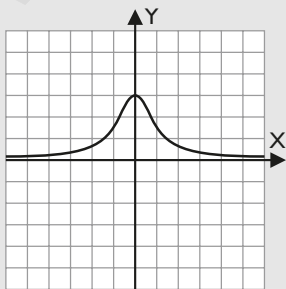
Solución:

$$y' = -\frac{6x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{18x^2 - 6}{(x^2 + 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{72x^3 - 72x}{(x^2 + 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: $A(0, 3)$
- Signo:
 - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(0, 3)$
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 0)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $B(-\sqrt{3}/3, 9/4)$, $C(\sqrt{3}/3, 9/4)$
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (0, 3]$

50. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

Solución:

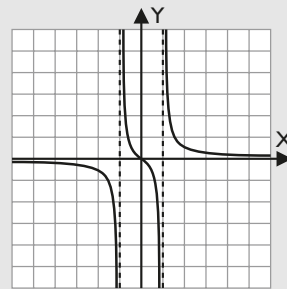
$$y' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{6x^4 + 36x^2 + 6}{(x^2 - 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1$, $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = -1$, $x = 1$
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
 - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $\emptyset$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

51. $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$

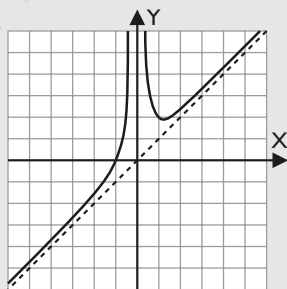
Solución:

$$y' = \frac{x^3 - 2}{x^3}$$

$$y'' = \frac{6}{x^4}$$

$$y''' = -\frac{24}{x^5}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = x$
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-1, 0)$
 - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
 - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, -1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $B(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{2}/2)$
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{2}, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(0, \sqrt[3]{2})$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $\emptyset$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

52. $y = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}$

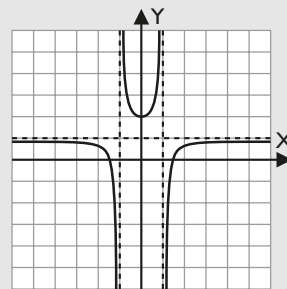
Solución:

$$y' = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = -\frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y''' = \frac{24x^3 + 24x}{(x^2 - 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:
 - $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1, x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = -1, x = 1$
 - Horizontales: $y = 1$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-\sqrt{2}, 0), B(\sqrt{2}, 0)$
 - Eje Y: $C(0, 2)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $C(0, 2)$
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(-1, 1)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$

4. Análisis de funciones irracionales

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

53. $y = \sqrt{x+2}$

Solución:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

$$y'' = -\frac{1}{4(x+2)\sqrt{x+2}}$$

$$y''' = \frac{3}{8(x+2)^2\sqrt{x+2}}$$

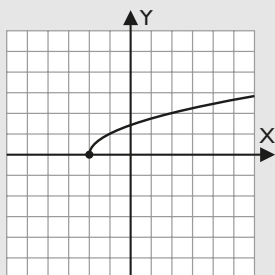
1. Tipo de función: irracional.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = [-2, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -2$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-2, 0)$
 - Eje Y: $B(0, \sqrt{2})$

Signo:

 - Positiva (+): $(-2, +\infty)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(-2, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $\emptyset$
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $\emptyset$
 - Cóncava ($\cap$): $(-2, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

54. $y = \sqrt{x^2 + 1}$

Solución:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$y'' = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$y''' = -\frac{3x}{(x^2 + 1)^2\sqrt{x^2 + 1}}$$

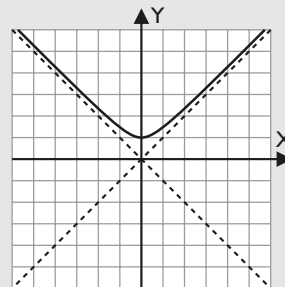
1. Tipo de función: irracional.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en toda la real $\mathbb{R}$
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = -x, y = x$
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: $A(0, 1)$

Signo:

 - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $A(0, 1)$

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(0, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, 0)$
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $\emptyset$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [1, +\infty)$

55. $y = \sqrt{x^2 - 9}$

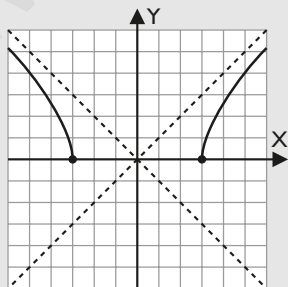
Solución:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$$y'' = -\frac{9}{(x^2 - 9)\sqrt{x^2 - 9}}$$

$$y''' = \frac{27x}{(x^2 - 9)^2\sqrt{x^2 - 9}}$$

1. Tipo de función: irracional.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -3, x = 3$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = -x, y = x$
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: A(-3, 0), B(3, 0)
 - Eje Y: no lo corta.
 Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(3, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -3)$
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $\emptyset$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

56. $y = \sqrt{9 - x^2}$

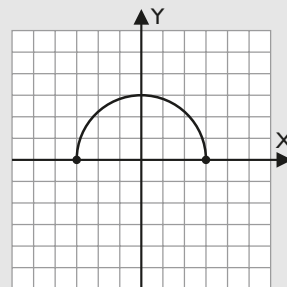
Solución:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$y'' = -\frac{9}{(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2}}$$

$$y''' = -\frac{27x}{(9 - x^2)^2\sqrt{9 - x^2}}$$

1. Tipo de función: irracional.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = [-3, 3]$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -3, x = 3$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: A(-3, 0), B(3, 0)
 - Eje Y: C(0, 3)
 Signo:
 - Positiva (+): $(-3, 3)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: C(0, 3)
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(-3, 0)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(0, 3)$
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $\emptyset$
 - Cóncava ($\cap$): $(-3, 3)$
- Es una semicircunferencia.



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [0, 3]$

57. $y = \sqrt[3]{x^2}$

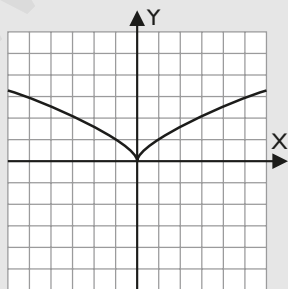
Solución:

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y'' = -\frac{2}{9x^2\sqrt[3]{x}}$$

$$y''' = \frac{8}{27x^2\sqrt[3]{x}}$$

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $O(0, 0)$
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(0, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, 0)$
9. Punto de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $\emptyset$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

58. $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

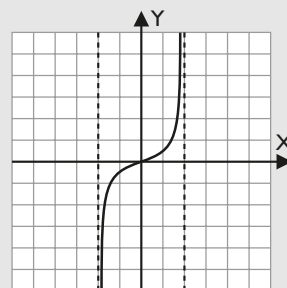
Solución:

$$y' = \frac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

$$y'' = \frac{12x}{(4-x^2)^2\sqrt{4-x^2}}$$

$$y''' = \frac{48(x^2+1)}{(4-x^2)^3\sqrt{4-x^2}}$$

1. Tipo de función: cociente de una polinómica entre una irracional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (-2, 2)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio. En $x = -2, x = 2$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = -2, x = 2$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(0, 2)$
 - Negativa (-): $(-2, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(-2, 2)$
 - Decreciente ($\searrow$): $\emptyset$
9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(0, 2)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-2, 0)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

5. Análisis de funciones exponenciales

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

59. $y = (x + 2)e^{-x}$

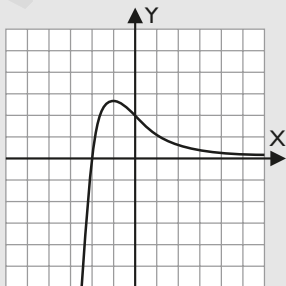
Solución:

$$y' = -(x + 1)e^{-x}$$

$$y'' = xe^{-x}$$

$$y''' = -(x - 1)e^{-x}$$

1. Tipo de función: polinómica por exponencial.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-2, 0)$
 - Eje Y: $B(0, 2)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(-2, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, -2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $C(-1, e)$
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -1)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-1, +\infty)$
9. Punto de inflexión: $B(0, 2)$
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (-\infty, e]$

60. $y = xe^x$

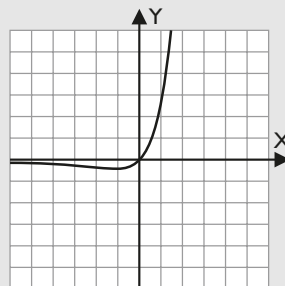
Solución:

$$y' = (x + 1)e^x$$

$$y'' = (x + 2)e^x$$

$$y''' = (x + 3)e^x$$

1. Tipo de función: polinómica por exponencial.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $A(-1, -1/e)$
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(-1, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -1)$
9. Punto de inflexión: $B(-2, -2/e^2)$
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(-2, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -2)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [-1/e, +\infty)$

Ejercicios y problemas

61. $y = \frac{e^{-x}}{x}$

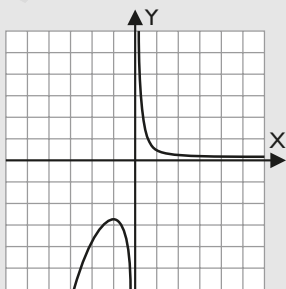
Solución:

$$y' = -\frac{(x+1)e^{-x}}{x^2}$$

$$y'' = \frac{(x^2 + 2x + 2)e^{-x}}{x^3}$$

$$y''' = -\frac{(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x}}{x^4}$$

1. Tipo de función: exponencial dividida entre polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(-1, -e)$
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -1)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (-\infty, -e] \cup (0, +\infty)$

62. $y = xe^{1/x}$

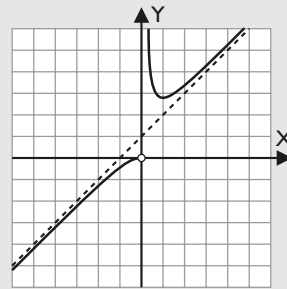
Solución:

$$y' = \frac{(x-1)e^{1/x}}{x}$$

$$y'' = \frac{e^{1/x}}{x^3}$$

$$y''' = -\frac{(3x+1)e^{1/x}}{x^5}$$

1. Tipo de función: exponencial.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = x + 1$
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $A(1, e)$
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(0, 1)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$

63. $y = e^{x^2}$

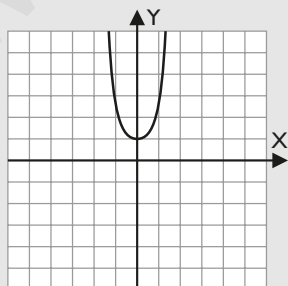
Solución:

$$y' = 2xe^{x^2}$$

$$y'' = (4x^2 + 2)e^{x^2}$$

$$y''' = (2x^2 + 3)4xe^{x^2}$$

1. Tipo de función: exponencial.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: A(0, 1)
- Signo:
 - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: A(0, 1)
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(0, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $\emptyset$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [1, +\infty)$

64. $y = \frac{e^{-x}}{x^2}$

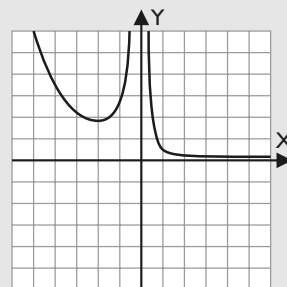
Solución:

$$y' = -\frac{(x+2)e^{-x}}{x^3}$$

$$y'' = \frac{(x^2 + 4x + 6)e^{-x}}{x^4}$$

$$y''' = -\frac{(x^3 + 6x^2 + 18x + 24)e^{-x}}{x^5}$$

1. Tipo de función: exponencial dividida entre polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio. En $x = 0$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: A(-2, $e^2/4$)
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(-2, 0)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $\emptyset$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (0, +\infty)$

6. Análisis de funciones logarítmicas

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

65. $y = L(x^2 + 1)$

Solución:

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}$$

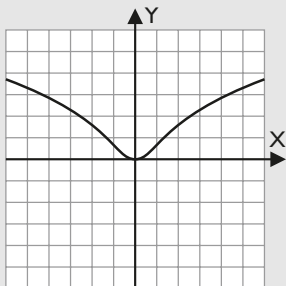
1. Tipo de función: logarítmica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

 - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $O(0, 0)$

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(0, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, 0)$
 9. Puntos de inflexión: $B(-1, L 2), C(1, L 2)$
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $(-1, 1)$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

66. $y = L(x^2 - 4)$

Solución:

$$y' = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 + 8}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 + 48x}{(x^2 - 4)^3}$$

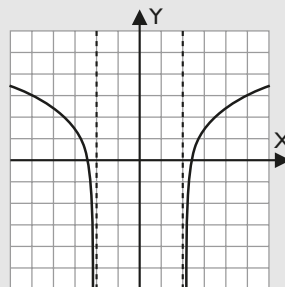
1. Tipo de función: logarítmica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = -2, x = 2$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = -2, x = 2$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-\sqrt{5}, 0), B(\sqrt{5}, 0)$
 - Eje Y: no lo corta.

Signo:

 - Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\sqrt{5}, -2) \cup (2, \sqrt{5})$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(2, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -2)$
 9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $\emptyset$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

67. $y = L(x-1)^2$

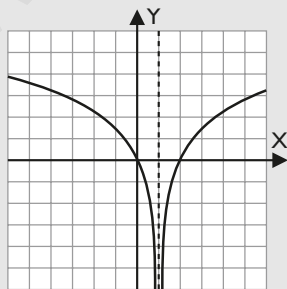
Solución:

$$y' = \frac{2}{x-1}$$

$$y'' = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$y''' = \frac{4}{(x-1)^3}$$

1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = 1$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 1$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0), A(2, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
 - Negativa (-): $(0, 1) \cup (1, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(1, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, 1)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $\emptyset$
 - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

68. $y = \frac{1}{Lx}$

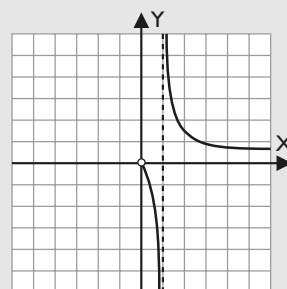
Solución:

$$y' = -\frac{1}{x^2 L^2 x}$$

$$y'' = \frac{2 + Lx}{x^2 L^3 x}$$

$$y''' = -\frac{2(L^2 x + 3 L x + 3)}{x^3 L^4 x}$$

1. Tipo de función: cociente de una polinómica entre una logarítmica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = 0$ tiene una discontinuidad de 2ª especie y en $x = 1$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 1$
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
 - Positiva (+): $(1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $\emptyset$
 - Decreciente ($\searrow$): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Punto de inflexión: $A(1/e^2, -1/2)$
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(0, 1/e^2) \cup (1, +\infty)$
 - Cóncava ($\cap$): $(1/e^2, 1)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Ejercicios y problemas

69. $y = \frac{x}{Lx}$

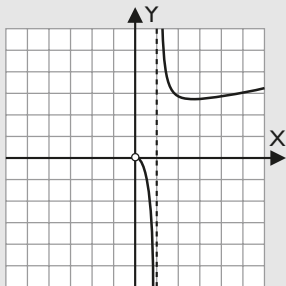
Solución:

$$y' = \frac{-1 + Lx}{L^2 x}$$

$$y'' = \frac{2 - Lx}{x L^3 x}$$

$$y''' = \frac{-6 + L^2 x}{x^2 L^4 x}$$

1. Tipo de función: cociente de una polinómica entre una logarítmica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio de definición; en $x = 0$ tiene una discontinuidad de 2ª especie y en $x = 1$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 1$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
 - Positiva (+): $(1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $A(e, e)$
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(e, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(0, 1) \cup (1, e)$
9. Punto de inflexión: $B(e^2, e^2/2)$
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(1, e^2)$
 - Cóncava ($\cap$): $(0, 1) \cup (e^2, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup (e, +\infty)$

70. $y = L^2 x$

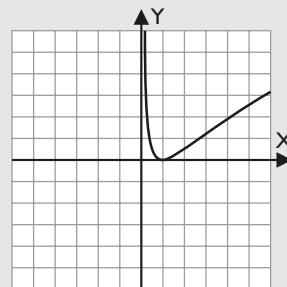
Solución:

$$y' = \frac{2Lx}{x}$$

$$y'' = \frac{2(1 - Lx)}{x^2}$$

$$y''' = \frac{2(-3 + 2Lx)}{x^3}$$

1. Tipo de función: logarítmica al cuadrado.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo su dominio; en $x = 0$ tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(1, 0)$
 - Eje Y: no lo corta.
- Signo:
 - Positiva (+): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $A(1, 0)$
- Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(1, +\infty)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(0, 1)$
9. Punto de inflexión: $B(e, 1)$
- Curvatura:
 - Convexa ($\cup$): $(0, e)$
 - Cóncava ($\cap$): $(e, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

7. Análisis de funciones trigonométricas

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

71. $y = 3 \sin x/2$

Solución:

$$y' = \frac{3}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$y'' = -\frac{3}{4} \sin \frac{x}{2}$$

$$y''' = -\frac{3}{8} \cos \frac{x}{2}$$

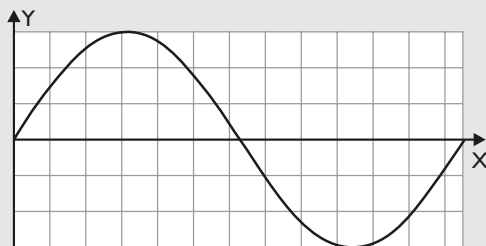
1. Tipo de función: trigonométrica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
 4. Periodicidad: es periódica de período 4π ; se estudia solo en el primer período $[0, 4\pi)$
 5. Simetrías: es simétrica respecto del origen de coordenadas $O(0, 0)$
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0), A(2\pi, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

 - Positiva (+): $(0, 2\pi)$
 - Negativa (-): $(2\pi, 4\pi)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $B(\pi, 3)$
 - Mínimo relativo: $C(3\pi, -3)$

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(\pi, 3\pi)$
 9. Puntos de inflexión: $O(0, 0), A(2\pi, 0)$
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $(2\pi, 4\pi)$
 - Cóncava ($\cap$): $(0, 2\pi)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [-3, 3]$

72. $y = \sin x - \cos x$

Solución:

$$y' = \cos x + \sin x$$

$$y'' = -\sin x + \cos x$$

$$y''' = -\cos x - \sin x$$

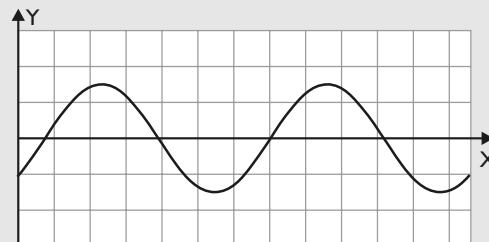
1. Tipo de función: trigonométrica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
 4. Periodicidad: es periódica de período 2π ; se estudia solo en el primer período $[0, 2\pi)$
 5. Simetrías: no es simétrica.
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(\pi/4, 0), B(5\pi/4, 0)$
 - Eje Y: $C(0, -1)$

Signo:

 - Positiva (+): $(\pi/4, 5\pi/4)$
 - Negativa (-): $(0, \pi/4) \cup (5\pi/4, 2\pi)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $D(3\pi/4, \sqrt{2})$
 - Mínimo relativo: $E(7\pi/4, -\sqrt{2})$

Monotonía:

 - Creciente ($\nearrow$): $(0, 3\pi/4) \cup (7\pi/4, 2\pi)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(3\pi/4, 7\pi/4)$
 9. Puntos de inflexión: $A(\pi/4, 0), B(5\pi/4, 0)$
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $(0, \pi/4) \cup (5\pi/4, 2\pi)$
 - Cóncava ($\cap$): $(\pi/4, 5\pi/4)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Ejercicios y problemas

73. $y = \sin^2 x$

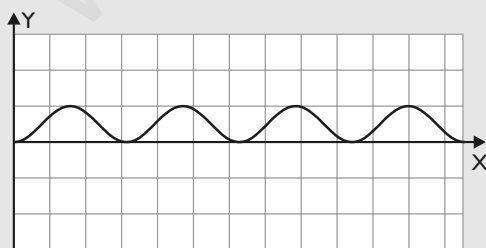
Solución:

$$y' = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$y'' = -2 + 4 \cos^2 x$$

$$y''' = -8 \sin x \cos x$$

1. Tipo de función: trigonométrica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
 4. Periodicidad: es periódica de período π ; se estudia solo en el primer período $[0, \pi)$
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$Signo:
 - Positiva (+): $(0, \pi)$
 - Negativa (-): $\emptyset$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(\pi/2, 1)$
 - Mínimo relativo: $O(0, 0)$Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(0, \pi/2)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(\pi/2, \pi)$
 9. Puntos de inflexión: $B(\pi/4, 1/2)$, $C(3\pi/4, 1/2)$
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$
 - Cóncava ($\cap$): $(\pi/4, 3\pi/4)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [0, 1]$$

74. $y = 3 \cos 2x$

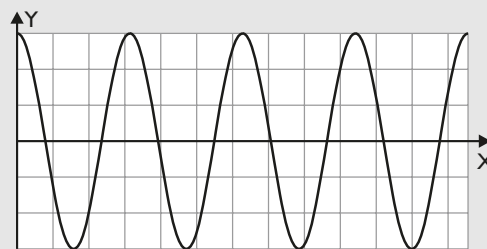
Solución:

$$y' = -6 \sin 2x$$

$$y'' = -12 \cos 2x$$

$$y''' = 24 \sin 2x$$

1. Tipo de función: trigonométrica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
 4. Periodicidad: es periódica de período π ; se estudia solo en el primer período $[0, \pi)$
 5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(\pi/4, 0)$, $B(3\pi/4, 0)$
 - Eje Y: $C(0, 3)$Signo:
 - Positiva (+): $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$
 - Negativa (-): $(\pi/4, 3\pi/4)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $C(0, 3)$
 - Mínimo relativo: $D(\pi/2, -3)$Monotonía:
 - Creciente ($\nearrow$): $(\pi/2, \pi)$
 - Decreciente ($\searrow$): $(0, \pi/2)$
 9. Puntos de inflexión: $A(\pi/4, 0)$, $B(3\pi/4, 0)$
- Curvatura:
- Convexa ($\cup$): $(\pi/4, 3\pi/4)$
 - Cóncava ($\cap$): $(0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-3, 3]$$

Para ampliar

75. Dada la función $y = x^3 + 2x$
- halla los puntos de inflexión.
 - esboza la gráfica.

Solución:

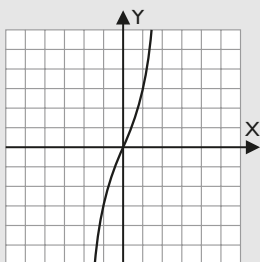
$$y' = 3x^2 + 2$$

$$y'' = 6x$$

$$y''' = 6 \neq 0$$

$$a) A(0, 0)$$

b) Gráfica:



76. Dada la función $y = x^4$
- halla y clasifica los puntos singulares.
 - esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 4x^3$$

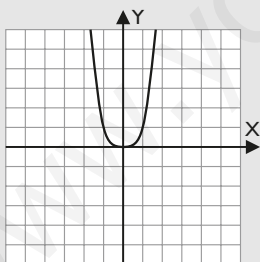
$$y'' = 12x^2$$

$$y''' = 24x$$

$$y^{(4)} = 24 > 0 (+)$$

$$a) A(0, 0) \text{ mínimo relativo.}$$

b) Gráfica:



77. Dada la función $y = \frac{1}{x^2}$

- calcula el dominio.
- determina las asíntotas.
- esboza la gráfica.

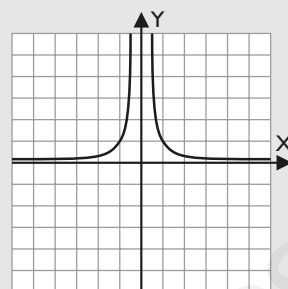
Solución:

$$a) \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

b) Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$
- Horizontales: $y = 0$

c) Gráfica:



78. Dada la función $y = \sqrt{x}$
- calcula el dominio.
 - determina la monotonía.
 - esboza la gráfica.

Solución:

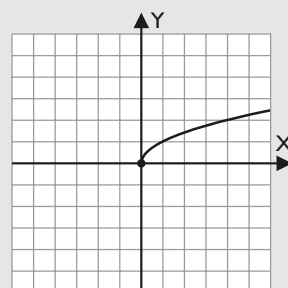
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$a) \text{Dom}(f) = [0, +\infty)$$

b) Monotonía:

- Creciente ($\nearrow$): $(0, +\infty)$
- Decreciente ($\searrow$): $\emptyset$

c) Gráfica:



79. Dada la función $y = x^4 - 6x^2 + 5$
- halla los máximos y mínimos relativos.
 - halla los puntos de inflexión.
 - esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 4x^3 - 12x$$

$$y'' = 12x^2 - 12$$

$$y''' = 24x$$

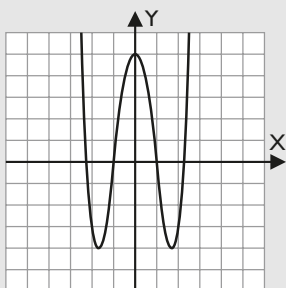
a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(0, 5)$
- Mínimo relativo: $B(-\sqrt{3}, -4)$; $C(\sqrt{3}, -4)$

b) Puntos de inflexión: $D(-1, 0)$; $E(1, 0)$

Ejercicios y problemas

c) Gráfica:



80. Sea la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 20$

- Determina los máximos y mínimos relativos.
- Halla los puntos de inflexión.
- Con los datos obtenidos haz un esbozo de la función.

Solución:

$$y' = 3x^2 - 12x$$

$$y'' = 6x - 12$$

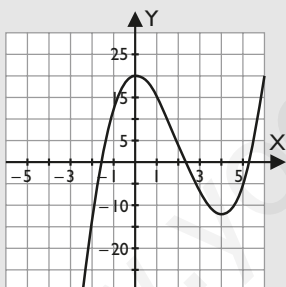
$$y''' = 6$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(0, 20)
- Mínimo relativo: B(4, -12)

b) Punto de inflexión: C(2, 4)

c) Gráfica:



81. Dada la función $y = x^4 - 2x^2$

- halla los máximos y mínimos relativos.
- halla los puntos de inflexión.
- esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 4x^3 - 4x$$

$$y'' = 12x^2 - 4$$

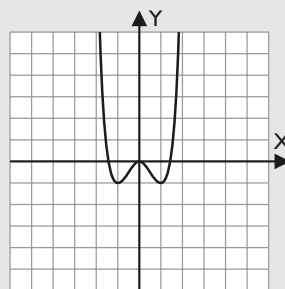
$$y''' = 24x$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: O(0, 0)
- Mínimo relativo: A(-1, -1); B(1, -1)

b) Puntos de inflexión: C(-√3/3, -5/9); D(√3/3, -5/9)

c) Gráfica:



82. Dada la función $y = \frac{x^2 + 1}{x^2}$

- calcula el dominio.
- determina las asíntotas.
- esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = -\frac{2}{x^3}$$

$$y'' = \frac{6}{x^4}$$

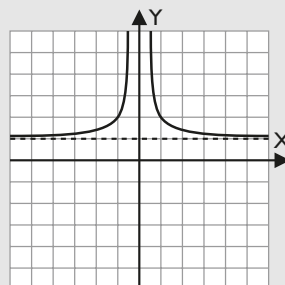
$$y''' = -\frac{24}{x^5}$$

a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

b) Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$
- Horizontales: $y = 1$

c) Gráfica:



83. Dada la función $y = x^3 - 3x^2 + 2$

- halla los máximos y mínimos relativos.
- halla los puntos de inflexión.
- esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y'' = 6x - 6$$

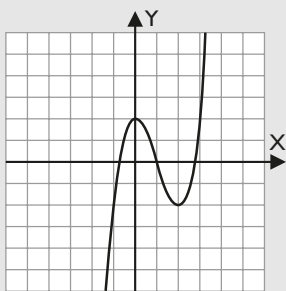
$$y''' = 6$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(0, 2)
- Mínimo relativo: B(2, -2)

b) Punto de inflexión: C(1, 0)

c) Gráfica:



84. Dada la función $y = 6x^2 - 3x^4$
- halla los máximos y mínimos relativos.
 - halla los puntos de inflexión.
 - esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 12x - 12x^3$$

$$y'' = 12 - 36x^2$$

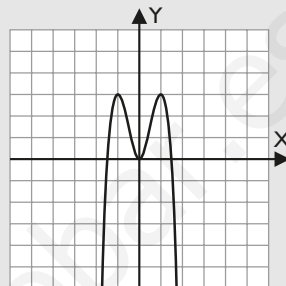
$$y''' = -72x$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(-1, 3)$; $B(1, 3)$
- Mínimo relativo: $O(0, 0)$

b) Puntos de inflexión: $C(-\sqrt{3}/3, 5/3)$; $D(\sqrt{3}/3, 5/3)$

c) Gráfica:



Problemas

85. Dada la función $y = x^3 + 3x^2$
- halla los máximos y mínimos relativos.
 - halla los puntos de inflexión.
 - esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 3x^2 + 6x$$

$$y'' = 6x + 6$$

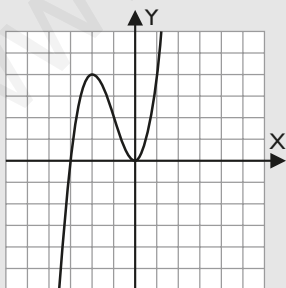
$$y''' = 6$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(-2, 4)$
- Mínimo relativo: $O(0, 0)$

b) Punto de inflexión: $C(-1, 2)$

c) Gráfica:



- determina los puntos de inflexión.
- esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = -\frac{2x}{(x-1)^3}$$

$$y'' = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

$$y''' = -\frac{12x+12}{(x-1)^5}$$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

b) Asíntotas:

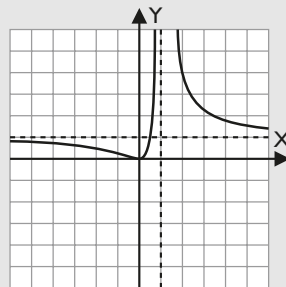
- Verticales: $x = 1$
- Horizontales: $y = 1$

c) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $O(0, 0)$

d) Punto de inflexión: $A(-1/2, 1/9)$

e) Gráfica:



86. Dada la función $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

- calcula el dominio.
- determina las asíntotas.
- halla los máximos y mínimos relativos.

Ejercicios y problemas

87. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x$$

- Determina los puntos de corte con los ejes.
- Halla los máximos y mínimos relativos.
- Calcula los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica de la función.

Solución:

$$y' = -6x^2 - 18x - 12$$

$$y'' = -12x - 18$$

$$y''' = -12$$

a) Puntos de corte con los ejes:

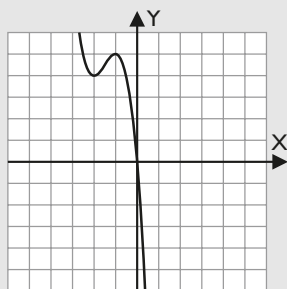
- Eje X: $O(0, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(-1, 5)$
- Mínimo relativo: $B(-2, 4)$

c) Punto de inflexión: $C(-3/2, 9/2)$

d) Gráfica:



88. Dada la siguiente función, definida en los números reales salvo en $x = 0$;

$$f(x) = 3 - x - \frac{2}{x}$$

- determina el dominio.
- halla las asíntotas.
- calcula las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.
- esboza la gráfica de la función

Solución:

$$y' = \frac{2}{x^2} - 1$$

$$y'' = -\frac{4}{x^3}$$

$$y''' = \frac{12}{x^4}$$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

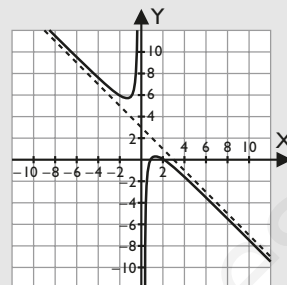
b) Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$
- Oblicuas: $y = 3 - x$

c) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$
- Mínimo relativo: $B(-\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$

d) Gráfica:



89. Dada la función $y = \sqrt{x^2 + 9}$

- calcula el dominio.
- determina las asíntotas.
- halla los máximos y mínimos relativos.
- esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$y'' = \frac{9}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$y''' = -\frac{27x}{(x^2 + 9)^2\sqrt{x^2 + 9}}$$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

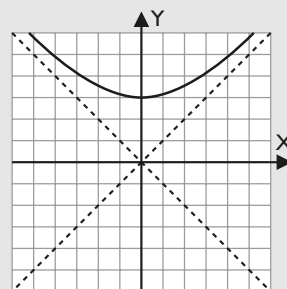
b) Asíntotas:

- Oblicuas: $y = x, y = -x$

c) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $A(0, 3)$

d) Gráfica:



90. Sea la función $V(t) = 60 \left(\frac{t^3}{3} - 5t^2 + 16t \right)$

- Calcula los máximos y mínimos relativos.
- Determina los puntos de inflexión.
- Esboza la gráfica de la función.

Solución:

$$v'(t) = 60(t^2 - 10t + 16)$$

$$v''(t) = 60(2t - 10)$$

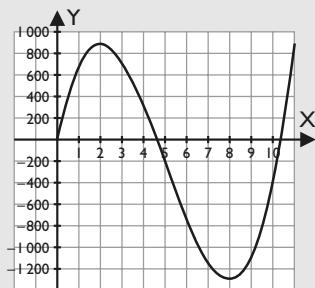
$$v'''(t) = 120$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(2, 880)
- Mínimo relativo: B(8, -1280)

b) Punto de inflexión: C(5, -200)

c) Gráfica:



91. Dada la función $y = 2x^2 - x^4$

- halla los máximos y mínimos relativos.
- halla los puntos de inflexión.
- esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 4x - 4x^3$$

$$y'' = 4 - 12x^2$$

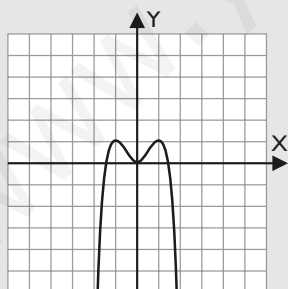
$$y''' = -24x$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(-1, 1), B(1, 1)
- Mínimo relativo: O(0, 0)

b) Puntos de inflexión: C(-√3/3, 5/9), D(√3/3, 5/9)

c) Gráfica:



92. Sea f la función definida para $x \neq -2$ por:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

- Halla las asíntotas de la gráfica de f
- Calcula los extremos locales de f
- Determina los puntos de inflexión.
- Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica.

Solución:

$$y' = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$$

$$y'' = \frac{8}{(x+2)^3}$$

$$y''' = -\frac{24}{(x+2)^4}$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$$

a) Asíntotas:

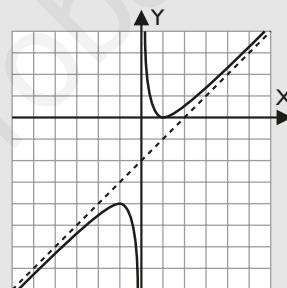
- Verticales: $x = -2$
- Oblicuas: $y = x - 2$

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(-4, -8)
- Mínimo relativo: O(0, 0)

c) $y'' \neq 0$. No hay puntos de inflexión.

d) Gráfica:



93. Se considera la función $f(x) = x^2 e^{-x}$

Estudia:

- asíntotas.
- extremos relativos.
- A partir de estos datos, representa la función.

Solución:

$$y' = -x(x-2)e^{-x}$$

$$y'' = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

$$y''' = -(x^2 - 6x + 6)e^{-x}$$

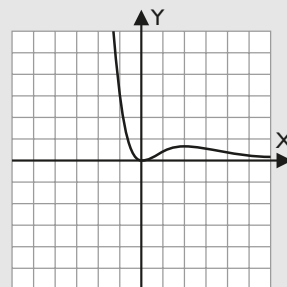
a) Asíntotas:

- Horizontal: $y = 0$

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(2, 4/e^2)
- Mínimo relativo: O(0, 0)

c) Gráfica:



Ejercicios y problemas

94. Dada la función $y = \sqrt[3]{x^2 + 4}$
- halla los máximos y mínimos relativos.
 - halla los puntos de inflexión.
 - esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 4)^2}}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 - 24}{9(x^2 + 4)\sqrt[3]{(x^2 + 4)^2}}$$

$$y''' = \frac{8x^3 - 288x}{27(x^2 + 4)^2\sqrt[3]{(x^2 + 4)^2}}$$

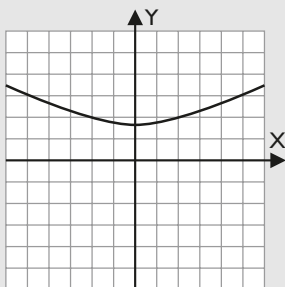
a) Máximos y mínimos relativos:

• Máximo relativo: no tiene.

• Mínimo relativo: $A(0, \sqrt[3]{4})$

b) Puntos de inflexión: $B(-2\sqrt{3}, 2\sqrt[3]{2})$; $C(2\sqrt{3}, 2\sqrt[3]{2})$

c) Gráfica:



95. Dada la función $y = e^x + e^{-x}$
- halla y clasifica los puntos singulares.
 - esboza la gráfica.

Solución:

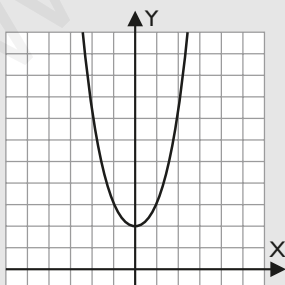
$$y' = e^x - e^{-x}$$

$$y'' = e^x + e^{-x}$$

$$y''' = e^x - e^{-x}$$

a) Punto singular: $A(0, 2)$ es un mínimo relativo.

b) Gráfica:



96. Halla y clasifica los puntos singulares de la función:

$$y = x^4 + x^2$$

Esboza la gráfica.

Solución:

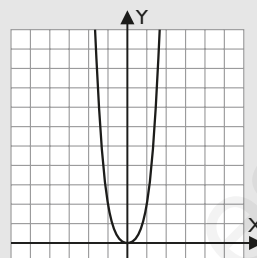
$$y' = 4x^3 + 2x$$

$$y'' = 12x^2 + 2$$

$$y''' = 24x$$

a) Punto singular: $A(0, 0)$ es un mínimo relativo.

b) Gráfica:



97. Dada la curva $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

- determina el dominio de definición.
- halla las simetrías.
- halla los puntos de corte con los ejes.
- calcula las asíntotas.
- halla los máximos y mínimos relativos.
- haz una representación aproximada.

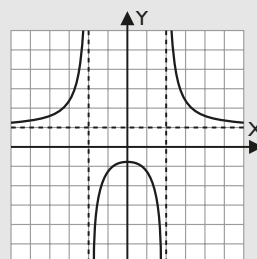
Solución:

$$y' = -\frac{14x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y'' = \frac{42x^2 + 56}{(x^2 - 4)^3}$$

$$y''' = -\frac{168x^3 + 672x}{(x^2 - 4)^4}$$

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: $A(0, -3/4)$
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = -2, x = 2$
 - Horizontales: $y = 1$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(0, -3/4)$
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Gráfica:



98. Dada la función $y = L(x + 1)^2$

- determina su dominio.
- halla los puntos de corte con los ejes.
- calcula las asíntotas.
- esboza la gráfica.

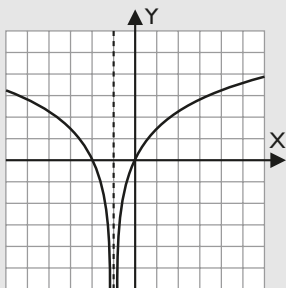
Solución:

$$y' = \frac{2}{x+1}$$

$$y'' = -\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$y''' = \frac{4}{(x+1)^3}$$

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$
- Corte con los ejes:
 - Eje X: A(-2, 0); O(0, 0)
 - Eje Y: O(0, 0)
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = -1$
- Gráfica:



99. Dada la función $y = x^4 + 4x$

- halla y clasifica los puntos singulares.
- calcula los puntos de inflexión.
- esboza la gráfica.

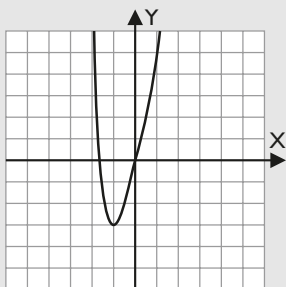
Solución:

$$y' = 4x^3 + 4$$

$$y'' = 12x^2$$

$$y''' = 24x$$

- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: A(-1, -3)
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Gráfica:



100. Dada la función $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

- calcula el dominio.
- halla las simetrías.
- determina las asíntotas.
- halla los puntos de corte con los ejes.
- esboza la gráfica.

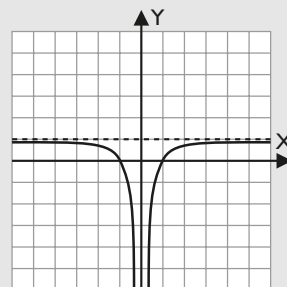
Solución:

$$y' = \frac{2}{x^3}$$

$$y'' = -\frac{6}{x^4}$$

$$y''' = \frac{24}{x^5}$$

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: $y = 1$
- Corte con los ejes:
 - Eje X: A(-1, 0); B(1, 0)
 - Eje Y: no lo corta.
- Gráfica:



101. Dada la función $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

- calcula el dominio.
- halla las simetrías.
- determina las asíntotas.
- halla los puntos de corte con los ejes.
- halla los puntos de inflexión.
- esboza la gráfica.

Solución:

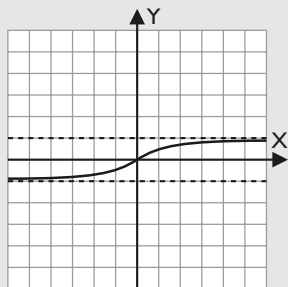
$$y' = \frac{4}{(x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$y'' = -\frac{12x}{(x^2 + 4)^2\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$y''' = \frac{48(x^2 - 1)}{(x^2 + 4)^3\sqrt{x^2 + 4}}$$

Ejercicios y problemas

- a) Dom (f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 b) Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0,0)
 c) Asíntotas:
 • Horizontales: $y = -1, y = 1$
 d) Corte con los ejes:
 • Eje X: O(0,0)
 • Eje Y: O(0,0)
 e) Punto de inflexión: O(0,0)
 f) Gráfica:



102. Dada la función $y = -(x+2)e^{-x}$
 a) calcula las asíntotas.
 b) halla los puntos de corte con los ejes.
 c) halla los máximos y mínimos relativos.
 d) determina los puntos de inflexión.
 e) esboza la gráfica.

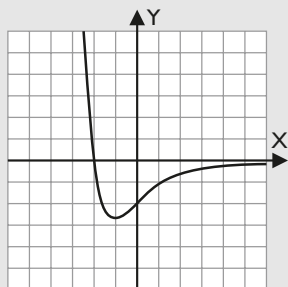
Solución:

$$y' = (x+1)e^{-x}$$

$$y'' = -xe^{-x}$$

$$y''' = (x-1)e^{-x}$$

- a) Asíntotas:
 • Horizontales: $y = 0$
 b) Corte con los ejes:
 • Eje X: A(-2,0)
 • Eje Y: B(0,-2)
 c) Máximos y mínimos relativos:
 • Máximo relativo: no tiene.
 • Mínimo relativo: C(-1,-e)
 d) Punto de inflexión: D(0,-2)
 e) Gráfica:



103. Dada la función $y = \frac{x(x+2)}{x^2-1}$

- a) calcula el dominio.
 b) determina las asíntotas.
 c) halla los puntos de corte con los ejes.
 d) esboza la gráfica.

Solución:

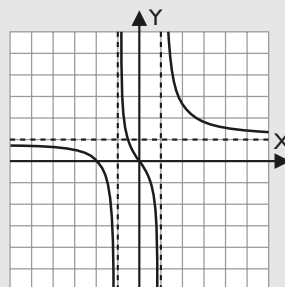
$$y' = -\frac{2x^2 + 2x + 2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{4x^3 + 6x^2 + 12x + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{12x^4 + 24x^3 + 72x^2 + 24x + 12}{(x^2 - 1)^4}$$

- a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
 b) Asíntotas:
 • Verticales: $x = -1, x = 1$
 • Horizontales: $y = 1$
 c) Corte con los ejes:
 • Eje X: A(-2,0); O(0,0)
 • Eje Y: O(0,0)

- d) Gráfica:



104. Dada la función $y = 3x^5 - 5x^3$

- a) determina las simetrías.
 b) calcula los puntos de corte con los ejes.
 c) halla los máximos y mínimos relativos.
 d) halla los puntos de inflexión.
 e) esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 15x^4 - 15x^2$$

$$y'' = 60x^3 - 30x$$

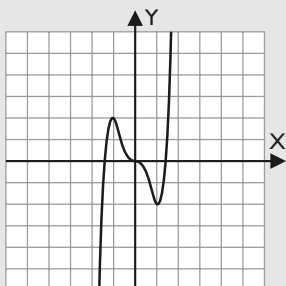
$$y''' = 180x^2 - 30$$

- a) Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0,0)
 b) Corte con los ejes:
 • Eje X: A(-√15/3,0); O(0,0); B(√15/3,0)
 • Eje Y: O(0,0)
 c) Máximos y mínimos relativos:
 • Máximo relativo: A(-1,2)
 • Mínimo relativo: B(1,-2)

d) Puntos de inflexión:

$$C(-\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/8); O(0, 0); D(\sqrt{2}/2, -7\sqrt{2}/8)$$

e) Gráfica:



Para profundizar

105. Dada la función $y = x^3 + 3x$

- halla los puntos de corte con los ejes.
- calcula los máximos y mínimos relativos.
- determina los puntos de inflexión.
- esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 3x^2 + 3$$

$$y'' = 6x$$

$$y''' = 6$$

a) Corte con los ejes:

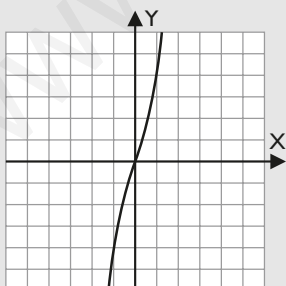
- Eje X: $O(0, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: no tiene.

c) Punto de inflexión: $O(0, 0)$

d) Gráfica:



106. Dada la función $y = x^4 + 2x^2$

- halla los puntos de corte con los ejes.
- calcula los máximos y mínimos relativos.
- determina los puntos de inflexión.
- esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 4x^3 + 4x$$

$$y'' = 12x^2 + 4$$

$$y''' = 24x$$

$$y^{IV} = 24$$

a) Corte con los ejes:

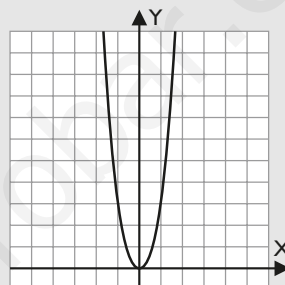
- Eje X: $O(0, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $O(0, 0)$

c) Puntos de inflexión: no tiene.

d) Gráfica:



107. Dada la función $y = \frac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}$

- calcula el dominio.
- determina las asíntotas.
- calcula los puntos de corte con los ejes.
- halla los máximos y mínimos relativos.
- determina los puntos de inflexión.
- esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = -\frac{4x - 2}{(x - 2)^3}$$

$$y'' = \frac{8x + 2}{(x - 2)^4}$$

$$y''' = -\frac{24x + 24}{(x - 2)^5}$$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

b) Asíntotas:

- Verticales: $x = 2$
- Horizontales: $y = 1$

c) Corte con los ejes:

- Eje X: $A(-1, 0); B(1, 0)$
- Eje Y: $C(0, -1/4)$

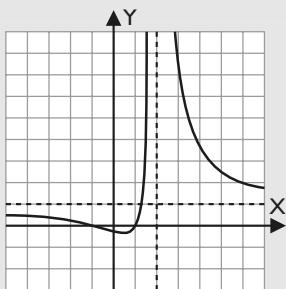
d) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $D(1/2, -1/3)$

e) Punto de inflexión: $O(-1/4, -5/27)$

Ejercicios y problemas

f) Gráfica:



108. Se considera la siguiente función:

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$$

- Calcula los máximos y mínimos relativos.
- Determina los intervalos de concavidad y convexidad.
- Representala gráficamente.

Solución:

$$y' = 6x^2 - 42x + 60$$

$$y'' = 12x - 42$$

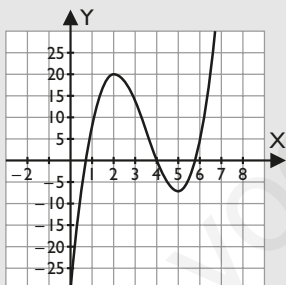
$$y''' = 12$$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(2, 20)
- Mínimo relativo: B(5, -7)

b) Punto de inflexión: C(7/2, 13/2)

c) Gráfica:



109. Dada la función $y = \sqrt{25 - x^2}$

- calcula el dominio.
- determina las asíntotas.
- calcula los puntos de corte con los ejes.
- halla los máximos y mínimos relativos.
- determina los puntos de inflexión.
- esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$y'' = -\frac{25}{(25 - x^2)\sqrt{25 - x^2}}$$

$$y''' = -\frac{75x}{(25 - x^2)^2\sqrt{25 - x^2}}$$

a) Dom (f) = [-5, 5]

b) Asíntotas: no tiene.

c) Corte con los ejes:

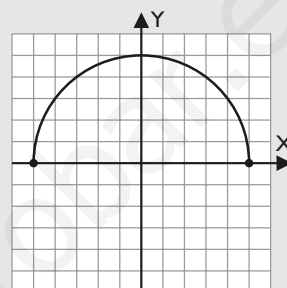
- Eje X: A(-5, 0); B(5, 0)
- Eje Y: C(0, 5)

d) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: C(0, 5)
- Mínimo relativo: no tiene.

e) Puntos de inflexión: no tiene.

f) Gráfica:



110. Dada la función $y = 3x^2 - x^3$

- calcula los puntos de corte con los ejes.
- halla los máximos y mínimos relativos.
- halla los puntos de inflexión.
- esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = 6x - 3x^2$$

$$y'' = 6 - 6x$$

$$y''' = -6$$

a) Corte con los ejes:

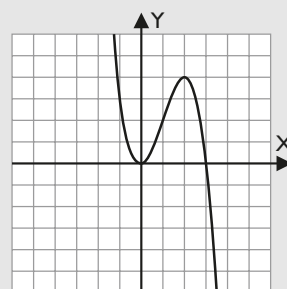
- Eje X: O(0, 0); A(3, 0)
- Eje Y: O(0, 0)

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: B(2, 4)
- Mínimo relativo: O(0, 0)

c) Punto de inflexión: C(1, 2)

d) Gráfica:



111. Dada la función $y = e^x - e^{-x}$

- determina las simetrías.
- calcula los puntos de corte con los ejes.
- halla los máximos y mínimos relativos.
- halla los puntos de inflexión.
- esboza la gráfica.

Solución:

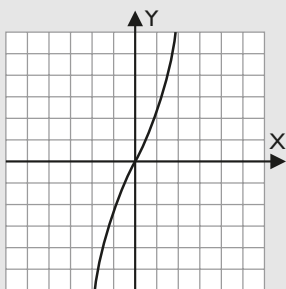
$$y' = e^x + e^{-x}$$

$$y'' = e^x - e^{-x}$$

$$y''' = e^x + e^{-x}$$

- Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Punto de inflexión: $O(0, 0)$

e) Gráfica:



112. Dada la función $y = 5x^3 - 3x^5$

- determina las simetrías.
- calcula los puntos de corte con los ejes.
- halla los máximos y mínimos relativos.
- halla los puntos de inflexión.
- esboza la gráfica.

Solución:

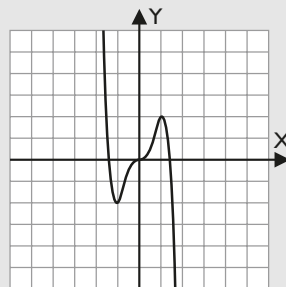
$$y' = 15x^2 - 15x^4$$

$$y'' = 30x - 60x^3$$

$$y''' = 30 - 180x^2$$

- Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-\sqrt{15}/3, 0)$; $O(0, 0)$; $B(\sqrt{15}/3, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(1, 2)$
 - Mínimo relativo: $B(-1, -2)$
- Puntos de inflexión:
 - $C(-\sqrt{2}/2, -7\sqrt{2}/8)$; $O(0, 0)$; $D(\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/8)$

e) Gráfica:



113. Dada la función $y = L(x^2 - x - 2)$

- determina su dominio.
- calcula las asíntotas.
- esboza la gráfica.

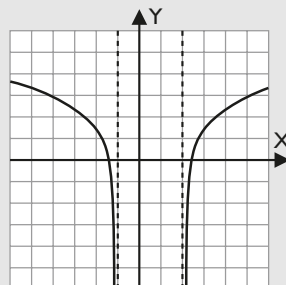
Solución:

$$y' = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 - 2x + 5}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 - 6x^2 + 30x - 14}{(x^2 - x - 2)^3}$$

- $\text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = -1$, $x = 2$
- Gráfica:



114. Dada la función $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$

- calcula el dominio.
- halla los puntos de corte con el eje X
- determina los máximos y mínimos relativos.
- halla los puntos de inflexión.
- esboza la gráfica.

Solución:

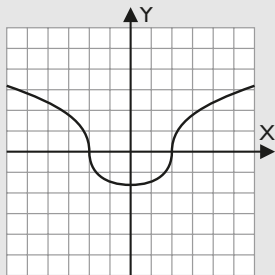
$$y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}$$

$$y'' = -\frac{2x^2 + 24}{9(x^2 - 4)^{5/3}}$$

$$y''' = \frac{8x^3 + 288x}{27(x^2 - 4)^{7/3}}$$

Ejercicios y problemas

- a) Dom $(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 b) Asíntotas: no tiene.
 c) Corte con los ejes:
 • Eje X: A(-2, 0); B(2, 0)
 • Eje Y: C(0, $-\sqrt[3]{4}$)
 d) Máximos y mínimos relativos:
 • Máximo relativo: no tiene.
 • Mínimo relativo: C(0, $-\sqrt[3]{4}$)
 e) Puntos de inflexión: A(-2, 0); B(2, 0)
 f) Gráfica:



115. Dada la función $y = x^4 - 4x$
 a) halla los máximos y mínimos relativos.
 b) halla los puntos de inflexión.
 c) esboza la gráfica.

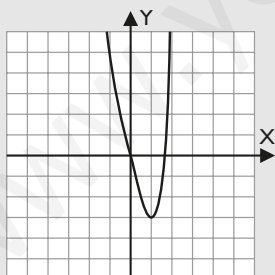
Solución:

$$y' = 4x^3 - 4$$

$$y'' = 12x^2$$

$$y''' = 24x$$

- a) Máximos y mínimos relativos:
 • Máximo relativo: no tiene.
 • Mínimo relativo: A(1, -3)
 b) Puntos de inflexión: no tiene.
 c) Gráfica:



116. Dada la función $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$
 a) halla los máximos y mínimos relativos.
 b) halla los puntos de inflexión.
 c) esboza la gráfica.

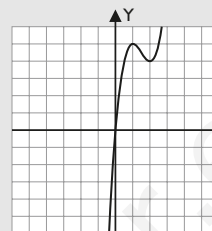
Solución:

$$y' = 6x^2 - 18x + 12$$

$$y'' = 12x - 18$$

$$y''' = 12$$

- a) Corte con los ejes:
 • Eje X: O(0, 0)
 • Eje Y: O(0, 0)
 b) Máximos y mínimos relativos:
 • Máximo relativo: A(1, 5)
 • Mínimo relativo: B(2, 4)
 c) Punto de inflexión: C(3/2, 9/2)
 d) Gráfica:



117. Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 8}}$

- a) calcula el dominio.
 b) calcula las asíntotas.
 c) halla los puntos de corte con el eje X
 d) determina los máximos y mínimos relativos.
 e) halla los puntos de inflexión.
 f) esboza la gráfica.

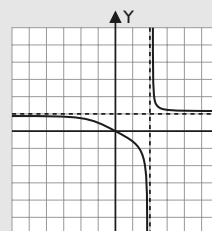
Solución:

$$y' = -\frac{8}{(x^3 - 8)^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{x^3 - 8}}$$

$$y'' = \frac{32x^2}{(x^3 - 8)^2 \sqrt[3]{x^3 - 8}}$$

$$y''' = -\frac{160x^4 + 512x}{(x^3 - 8)^3 \sqrt[3]{x^3 - 8}}$$

- a) Dom $(f) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$
 b) Asíntotas:
 • Verticales: $x = 2$
 • Horizontales: $y = 1$
 c) Corte con los ejes:
 • Eje X: O(0, 0)
 • Eje Y: O(0, 0)
 d) Máximos y mínimos relativos:
 • Máximo relativo: no tiene.
 • Mínimo relativo: no tiene.
 e) Puntos de inflexión: no tiene.
 f) Gráfica:



Paso a paso

118. Representa y analiza la función:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

119. Internet. Abre: www.editorial-bruno.es y elige Matemáticas, curso y tema.

Practica

Representa las siguientes funciones completando para cada una de ellas el formulario de los 10 apartados:

120. Representa y analiza la función:

$$y = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$$

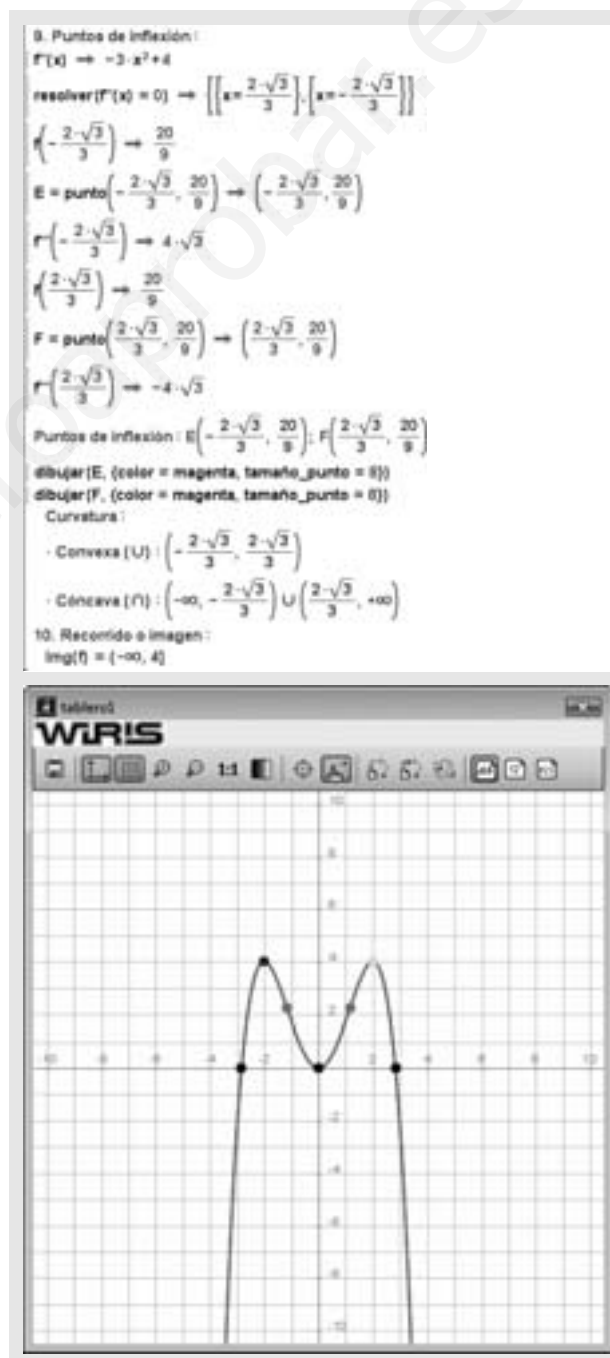
Solución:

Ejercicio 120

$f(x) = 2x^2 - \frac{x^4}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \cdot x^3 + 2 \cdot x^2$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: por ser una función polinómica es toda la recta real.
Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: por ser una función polinómica es continua en toda la recta real.
4. Periodicidad: por ser una función polinómica no es periódica.
5. Simetrías:
 $f(-x) \Rightarrow -\frac{1}{4} \cdot x^4 + 2 \cdot x^2$
 $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ es par, simétrica respecto del eje Y
6. Asintotas: por ser una función polinómica no tiene asíntotas.
7. Corte con los ejes:
resolver(f(x) = 0) $\Rightarrow \{x=0\}, \{x=-2 \cdot \sqrt{2}\}, \{x=2 \cdot \sqrt{2}\}$
Eje X: O(0, 0), A(-2·√2, 0), B(2·√2, 0)
O = punto(0, 0) $\Rightarrow (0, 0)$
A = punto(-2·√2, 0) $\Rightarrow (-2 \cdot \sqrt{2}, 0)$
B = punto(2·√2, 0) $\Rightarrow (2 \cdot \sqrt{2}, 0)$
dibujar(O, {color = negro, tamaño_punto = 8})
dibujar(A, {color = negro, tamaño_punto = 8})
dibujar(B, {color = negro, tamaño_punto = 8})
Eje Y: O(0, 0)
Signo:
- Positiva (+): $[-2 \cdot \sqrt{2}, 0] \cup [0, 2 \cdot \sqrt{2}]$
- Negativa (-): $[-\infty, -2 \cdot \sqrt{2}] \cup [2 \cdot \sqrt{2}, +\infty]$
8. Máximos y mínimos relativos:
 $f'(x) \Rightarrow -x^3 + 4 \cdot x$
resolver(f'(x) = 0) $\Rightarrow \{x=-2\}, \{x=0\}, \{x=2\}$
 $f(0) \Rightarrow 0$
O = punto(0, 0) $\Rightarrow (0, 0)$
 $f'(0) \Rightarrow 4$
- Mínimo relativo: O(0, 0)
 $f(-2) \Rightarrow 4$
C = punto(-2, 4) $\Rightarrow (-2, 4)$
 $f'(-2) \Rightarrow -8$
- Máximo relativo: A(-2, 4)
dibujar(C, {color = azul, tamaño_punto = 8})
 $f(2) \Rightarrow 4$
D = punto(2, 4) $\Rightarrow (2, 4)$
 $f'(2) \Rightarrow -8$
- Máximo relativo: B(2, 4)
dibujar(D, {color = cian, tamaño_punto = 8})
- Monotonía:
- Creciente: $[-\infty, -2] \cup [0, 2]$
- Decreciente: $[-2, 0] \cup [2, +\infty]$



121. Representa y analiza la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Solución:

Ejercicio 121

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x}$$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

1. Tipo de función : racional.

2. Dominio : por ser una función racional hay que excluir las raíces del denominador.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

3. Continuidad : es discontinua en $x = 0$ donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

4. Periodicidad : por ser una función racional no es periódica.

5. Simetrías :

$$f(-x) \Rightarrow \frac{-x^2 - 1}{-x}$$

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ es impar, simétrica respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asintotas :

- Verticales : $x = 0$

dibujar($x = 0$, {color=verde, anchura_linea=2})

- Horizontales : no tiene.

- Oblicuas :

$$\frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

$$y = x$$

dibujar($y = x$, {color=verde, anchura_linea=2})

7. Corte con los ejes :

resolver($f(x) = 0$) $\Rightarrow \{ \}$

- Eje X : No lo corta.

- Eje Y : No lo corta.

Signo :

- Positiva (+) : $(0, +\infty)$

- Negativa (-) : $(-\infty, 0)$

8. Máximos y mínimos relativos :

$$f'(x) \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

resolver($f'(x) = 0$) $\Rightarrow \{x = -1\}, \{x = 1\}$

$$f(-1) \Rightarrow -2$$

A = punto(-1, -2) $\Rightarrow (-1, -2)$

$$f'(-1) \Rightarrow -2$$

- Máximo relativo : A(-1, -2)

dibujar(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})

$$f(1) \Rightarrow 2$$

B = punto(1, 2) $\Rightarrow (1, 2)$

$$f'(1) \Rightarrow 2$$

- Mínimo relativo : B(1, 2)

dibujar(B, {color = cian, tamaño_punto = 8})

Monotonía :

- Creciente : $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- Decreciente : $(-1, 0) \cup (0, 1)$

9. Puntos de inflexión :

$$f''(x) \Rightarrow \frac{2}{x^3}$$

Puntos de inflexión : no tiene.

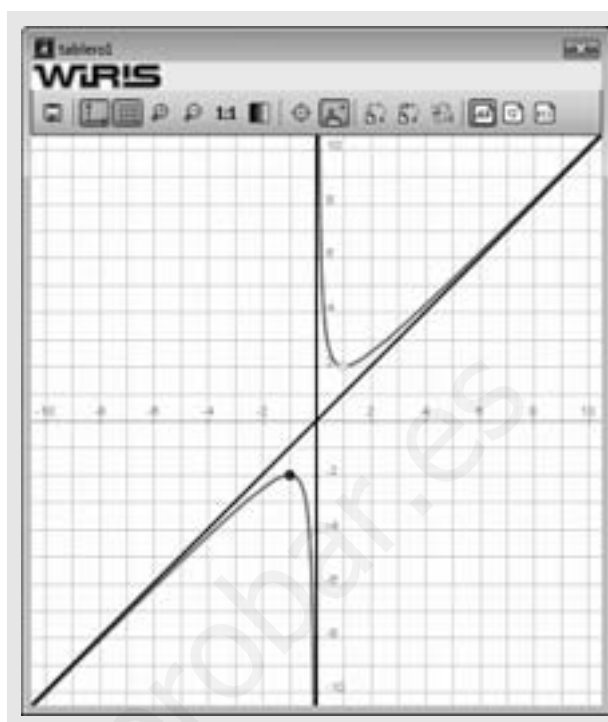
Curvatura :

- Convexa (U) : $(0, +\infty)$

- Cóncava (∩) : $(-\infty, 0)$

10. Recorrido o imagen :

$$\text{Im}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$



122. Representa y analiza la función:

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$

Ejercicio 122

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \Rightarrow x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

1. Tipo de función : irracional.

2. Dominio : por ser una función irracional de índice par, el radicando tiene que ser positivo.

$$\text{resolver_inecuación}(x^2 - 4 \geq 0) \Rightarrow x \geq 2 \vee x \leq -2$$

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

3. Continuidad : es discontinua en $x = -2$, $x = 2$ donde tiene una discontinuidad de 2ª especie.

4. Periodicidad : por ser una función irracional no es periódica.

5. Simetrías :

$$f(-x) \Rightarrow \sqrt{(-x)^2 - 4}$$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ es par, simétrica respecto del eje Y

6. Asintotas :

- Verticales : no tiene.

- Horizontales : no tiene.

- Oblicuas :

$$m1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \Rightarrow 1$$

$$b1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) \Rightarrow 0$$

$$y = x$$

dibujar($y = x$, {color=verde, anchura_linea=2})

$$m2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \Rightarrow -1$$

$$b2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) \Rightarrow +\infty$$

$$y = -x$$

dibujar($y = -x$, {color=verde, anchura_linea=2})

7. Corte con los ejes :

$\text{resolver}\{f(x) = 0\} \rightarrow \{\{x=-2\}, \{x=2\}\}$

A = punto(-2, 0) $\rightarrow$ (-2, 0)

B = punto(2, 0) $\rightarrow$ (2, 0)

- Eje X : A(-2, 0); B(2, 0)

dibujar(A, {color=negro, tamaño_punto=8})

dibujar(B, {color=negro, tamaño_punto=8})

- Eje Y : No lo corta.

Signo :

- Positiva (+) : $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

- Negativa (-) : Nunca.

8. Máximos y mínimos relativos :

$f'(x) \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

$\text{resolver}\{f'(x) = 0\} \rightarrow \{\}$

$0 \notin \text{Dom}(f)$

- Máximo relativo : No tiene.

- Mínimo relativo : No tiene.

Monotonía :

- Creciente : $(2, +\infty)$

- Decreciente : $(-\infty, -2)$

9. Puntos de inflexión :

$f''(x) \rightarrow \frac{-4}{(x^2-4) \cdot \sqrt{x^2-4}}$

Puntos de inflexión : no tiene.

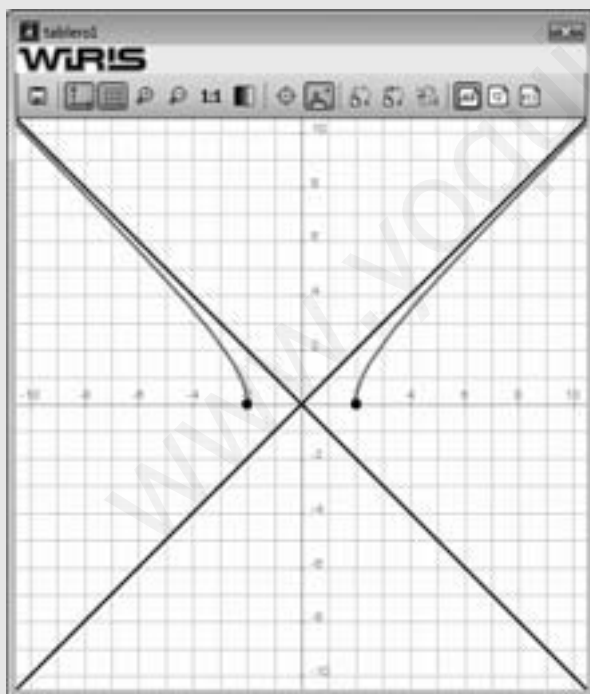
Curvatura :

- Convexa (U) : Nunca.

- Cóncava (∩) : $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

10. Recorrido o imagen :

$\text{Img}(f) = [0, +\infty)$



123. Representa y analiza la función:

$$y = (2-x)e^x$$

Solución:

Ejercicio 123

$f(x) = (2-x) \cdot e^x \rightarrow x \mapsto (-x+2) \cdot e^x$

dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_linea=2})

1. Tipo de función : producto de polinómica por exponencial.

2. Dominio : por ser el producto de una función polinómica por una función exponencial es toda la recta real.

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. Continuidad : por ser el producto de una función polinómica por una función exponencial es continua en toda la recta real.

4. Periodicidad : por ser el producto de una función polinómica por una función exponencial no es periódica.

5. Simetrías :

$f(-x) \rightarrow (x+2) \cdot e^{-x}$

$f(x)$ no es par, ni impar, no es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$ ni respecto del eje Y.

6. Asintotas :

- Verticales : no tiene.

- Horizontales : $y = 0$

- Oblicuas : no tiene.

dibujar(y=0, {color=negro, anchura_linea=2})

7. Corte con los ejes :

$\text{resolver}\{f(x) = 0\} \rightarrow \{\{x=2\}\}$

A = punto(2, 0) $\rightarrow$ (2, 0)

- Eje X : A(2, 0)

dibujar(A, {color=negro, tamaño_punto=8})

$f(0) \rightarrow 2$

B = punto(0, 2) $\rightarrow$ (0, 2)

- Eje Y : B(0, 2)

dibujar(B, {color=negro, tamaño_punto=8})

Signo :

- Positiva (+) : $(-\infty, 2)$

- Negativa (-) : $(2, +\infty)$

8. Máximos y mínimos relativos :

$f'(x) \rightarrow (-x+1) \cdot e^x$

$\text{resolver}\{f'(x) = 0\} \rightarrow \{\{x=1\}\}$

$f(1) \rightarrow e$

C = punto(1, e) $\rightarrow$ (1, e)

$f''(1) \rightarrow -e$

- Máximo relativo : C(1, e)

dibujar(C, {color=azul, tamaño_punto=8})

Monotonía :

- Creciente : $(-\infty, 1)$

- Decreciente : $(1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión :

$f''(x) \rightarrow -x \cdot e^x$

$\text{resolver}\{f''(x) = 0\} \rightarrow \{\{x=0\}\}$

$f(0) \rightarrow 2$

$f''(0) \rightarrow -1$

Puntos de inflexión : A(2, 0)

dibujar(A, {color=magenta, tamaño_punto=8})

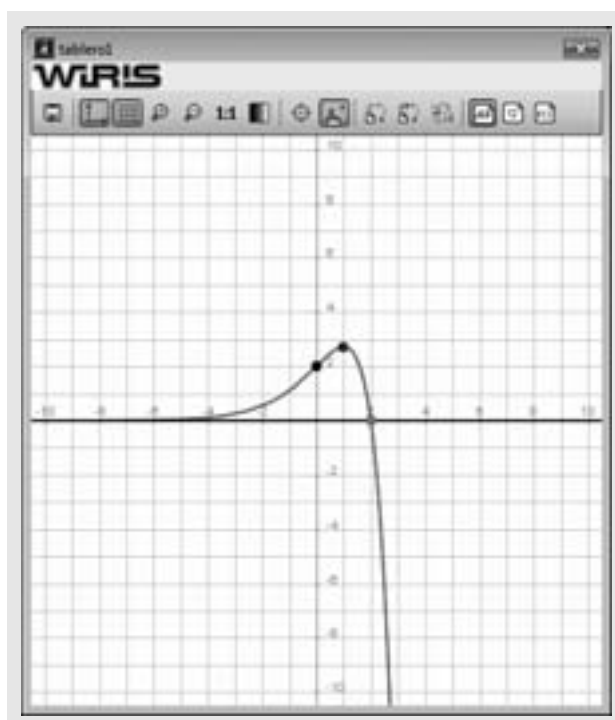
Curvatura :

- Convexa (U) : $(-\infty, 0)$

- Cóncava (∩) : $(0, +\infty)$

10. Recorrido o imagen :

$\text{Img}(f) = (-\infty, e]$



124. Representa y analiza la función:

$$y = L(x^2 - 1)$$

Solución:

Ejercicio 124

$$f(x) = \ln(x^2 - 1) \Rightarrow x \mapsto \ln(x^2 - 1)$$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

1. Tipo de función: función logarítmica.

2. Dominio: por ser una función logarítmica $x^2 - 1 > 0$

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

3. Continuidad: por ser una función logarítmica es continua en todo su dominio.

4. Periodicidad: por ser una función logarítmica no es periódica.

5. Simetrías:

$$f(-x) \Rightarrow \ln(x^2 - 1)$$

$f(x)$ es par, simétrica respecto del eje Y

4. Asintotas:

· Verticales: $x = -1$, $x = 1$

dibujar(x = -1, {color = verde, anchura_linea = 2})

dibujar(x = 1, {color = verde, anchura_linea = 2})

· Horizontales: no tiene.

· Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

$$\text{resolver}(f(x) = 0) \Rightarrow \{x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}\}$$

$$A = \text{punto}(-\sqrt{2}, 0) \Rightarrow (-\sqrt{2}, 0)$$

$$B = \text{punto}(\sqrt{2}, 0) \Rightarrow (\sqrt{2}, 0)$$

· Eje X: A(-√2, 0); B(√2, 0)

dibujar(A, {color = negro, tamaño_punto = 8})

dibujar(B, {color = negro, tamaño_punto = 8})

· Eje Y: no lo corta.

Signo:

· Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

· Negativa (-): $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$

8. Máximos y mínimos relativos:

$$f(x) \Rightarrow \frac{2-x}{x^2-1}$$

$$\text{resolver}(f'(x) = 0) \Rightarrow \{x=0\}$$

$x = 0 \notin \text{Dom}(f)$, no tiene máximos, ni mínimos relativos.

Monotonía:

· Creciente: $(1, +\infty)$

· Decreciente: $(-\infty, -1)$

9. Puntos de inflexión:

$$f''(x) \Rightarrow \frac{-2 \cdot x^2 - 2}{x^3 - 2 \cdot x^2 + 1}$$

$$\text{resolver}(f''(x) = 0) \Rightarrow \{\}$$

Puntos de inflexión: no tiene.

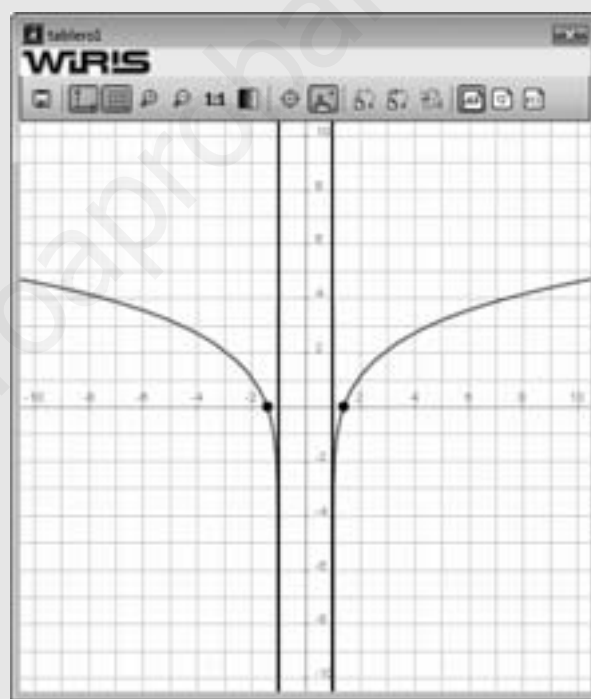
Curvatura:

· Convexa (U): nunca.

· Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

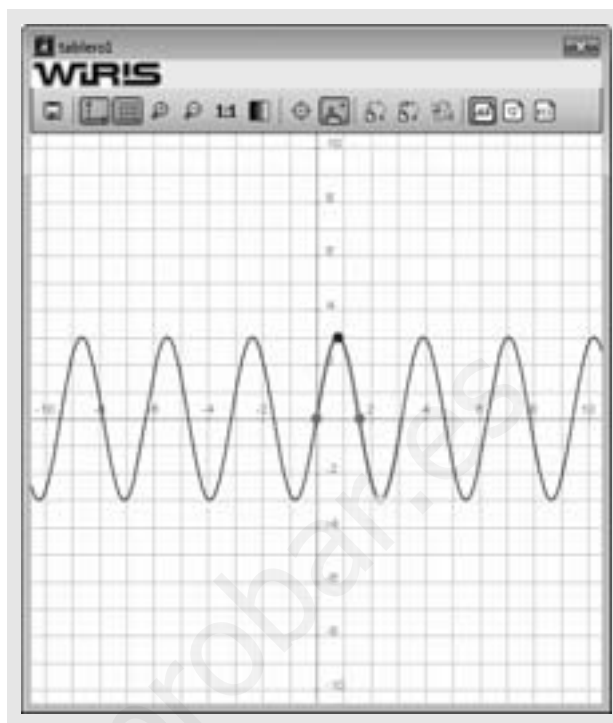


125. Representa y analiza la función:

$$y = 3 \sin 2x$$

Solución:

Ejercicio 125
 $f(x) = 3 \sin(2x) \Rightarrow x \mapsto 3 \cdot \sin(2 \cdot x)$
 dibujar($f(x)$)
 1. Tipo de función: función trigonométrica.
 2. Dominio: por ser una función trigonométrica seno:
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: por ser una función trigonométrica seno es continua es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
 4. Periodicidad: por ser una función trigonométrica es periódica.
 Periodo $= 2\pi/2 = \pi$. La estudiaremos solo en el primer periodo positivo.
 dibujar($f(x)$, 0.. π , {color = rojo, anchura_linea = 2})
 5. Simetrías:
 $f(-x) \Rightarrow 3 \cdot \sin(-2 \cdot x)$
 $f(x)$ es impar, simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
 4. Asíntotas: no tiene por ser una función trigonométrica del seno.
 7. Corte con los ejes:
 resolver($f(x) = 0$) $\Rightarrow \{x=0\}, \{x=\frac{\pi}{2}\}$
 $O = \text{punto}(0, 0) \Rightarrow (0, 0)$
 $A = \text{punto}(\frac{\pi}{2}, 0) \Rightarrow (\frac{\pi}{2}, 0)$
 - Eje X: $O(0, 0); A(\frac{\pi}{2}, 0)$
 dibujar(O , {color = negro, tamaño_punto = 8})
 dibujar(A , {color = negro, tamaño_punto = 8})
 - Eje Y: $c(0, 0)$
 Signo:
 - Positiva (+): $[0, \pi/2]$
 - Negativa (-): $[\pi/2, \pi]$
 6. Máximos y mínimos relativos:
 $f'(x) \Rightarrow 6 \cdot \cos(2 \cdot x)$
 resolver($f'(x) = 0$) $\Rightarrow \{x=\frac{\pi}{4}\}, \{x=\frac{3\pi}{4}\}$
 $f(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow 3$
 $C = \text{punto}(\frac{\pi}{4}, 3) \Rightarrow (\frac{\pi}{4}, 3)$
 $f(\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow -3$
 $D = \text{punto}(\frac{3\pi}{4}, -3) \Rightarrow (\frac{3\pi}{4}, -3)$
 $f'(\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow 12$
 - Máximo relativo: $C(\frac{\pi}{4}, 3)$
 dibujar(C , {color = azul, tamaño_punto = 8})
 $f(\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow -3$
 $D = \text{punto}(\frac{3\pi}{4}, -3) \Rightarrow (\frac{3\pi}{4}, -3)$
 $f'(\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow 12$
 - Máximo relativo: $C(\frac{3\pi}{4}, -3)$
 dibujar(D , {color = cian, tamaño_punto = 8})
 Monotonía:
 - Creciente: $[0, \pi/4] \cup [3\pi/4, \pi]$
 - Decreciente: $[\pi/4, 3\pi/4]$
 9. Puntos de inflexión:
 $f''(x) \Rightarrow -12 \cdot \sin(2 \cdot x)$
 resolver($f''(x) = 0$) $\Rightarrow \{x=0\}, \{x=\frac{\pi}{2}\}$
 dibujar(O , {color = magenta, tamaño_punto = 8})
 dibujar(A , {color = magenta, tamaño_punto = 8})
 Puntos de inflexión: $O(0, 0), A(\pi/2, 0)$
 Curvatura:
 - Convexa (U): $[\pi/2, \pi]$
 - Cóncava (∩): $[0, \pi/2]$
 10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [-3, 3]$



126. Dada la función:

$$f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}$$

se pide:

- asíntotas.
- máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- dibujar su gráfica.

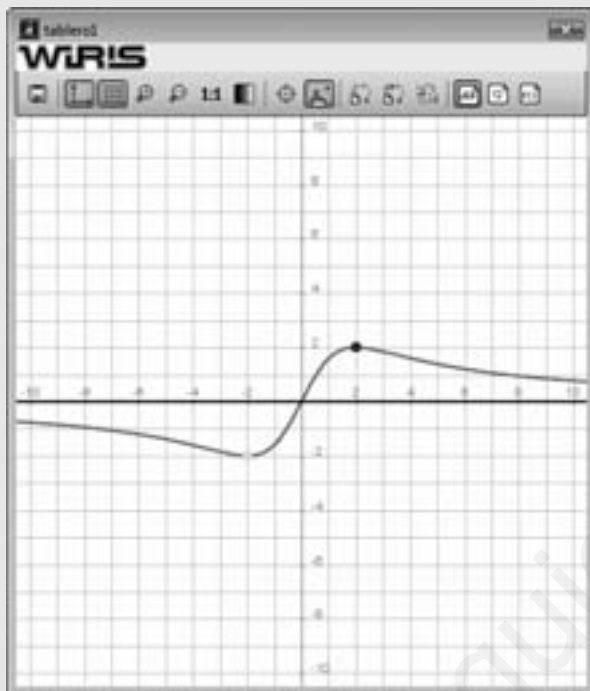
Solución:

Ejercicio 126
 $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4} \Rightarrow x \mapsto \frac{8 \cdot x}{x^2 + 4}$
 dibujar($f(x)$, {color = rojo, anchura_linea = 2})
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene, porque nunca se anula el denominador.
 - Horizontales:
 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \Rightarrow 0$
 dibujar($y = 0$, {color = verde, anchura_linea = 2})
 - Oblicuas: no tiene, porque el grado del numerador no es uno más que el del denominador.
 8. Máximos y mínimos relativos:
 $f'(x) \Rightarrow \frac{-8 \cdot x^2 + 32}{x^4 + 8 \cdot x^2 + 16}$
 resolver($f'(x) = 0$) $\Rightarrow \{x=-2\}, \{x=2\}$
 $f(-2) \Rightarrow -2$
 $A = \text{punto}(-2, -2) \Rightarrow (-2, -2)$
 $f'(x) \Rightarrow \frac{16 \cdot x^3 - 192 \cdot x}{x^4 + 12 \cdot x^2 + 48 \cdot x^2 + 64}$
 $f'(-2) \Rightarrow \frac{1}{2}$

```

- Mínimo relativo : A(-2, -2)
dibujar(A, {color = cian, tamaño_punto = 8})
f(2) → 2
B = punto(2, 2) → (2, 2)
f'(2) → -1/2
- Máximo relativo : B(2, 2)
dibujar(B, {color = azul, tamaño_punto = 8})
Monotonía :
f(0) → 2
- Creciente : (-2, 2)
- Decreciente : (-∞, -2) ∪ (2, +∞)

```



127. Dada la función:

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

dibuja la gráfica estudiando:

- asíntotas
- crecimiento y decrecimiento.
- puntos de inflexión.

Solución:

Ejercicio 127

$$f(x) = e^{-x} \cdot (x^2 + 1) \Rightarrow x \mapsto (x^2 + 1) \cdot e^{-x}$$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})

6. Asíntotas :

- Verticales : no tiene, porque en el denominador estaría e^x que nunca se anula.

- Horizontales :

$$h = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow +\infty$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow 0$$

dibujar(y = 0, {color = verde, anchura_linea = 2})

- Oblicuas :

$$m1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow -\infty$$

$$m2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$$

no tiene asíntotas oblicuas.

8. Máximos y mínimos relativos :

$$f'(x) \rightarrow (-x^2 + 2 \cdot x - 1) \cdot e^{-x}$$

$$\text{resolver}(f'(x) = 0) \rightarrow \{x=1\}$$

$$f(1) \rightarrow \frac{2}{e}$$

$$A = \text{punto}\left(1, \frac{2}{e}\right) \rightarrow \left(1, \frac{2}{e}\right)$$

$$f''(x) \rightarrow (x^2 - 4 \cdot x + 3) \cdot e^{-x}$$

$$f''(1) \rightarrow 0$$

$$f'''(x) \rightarrow (-x^2 + 6 \cdot x - 7) \cdot e^{-x}$$

$$f'''(1) \rightarrow \frac{-2}{e}$$

- $A\left(1, \frac{2}{e}\right)$ es un punto de inflexión.

dibujar(A, {color = magenta, tamaño_punto = 8})

Monotonía :

$$f(0) \rightarrow -1$$

- Creciente : (-2, 2)

- Decreciente : $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

9. Puntos de inflexión :

$$f'(x) \rightarrow (x^2 - 4 \cdot x + 3) \cdot e^{-x}$$

$$\text{resolver}(f'(x) = 0) \rightarrow \{x=1\}, \{x=3\}$$

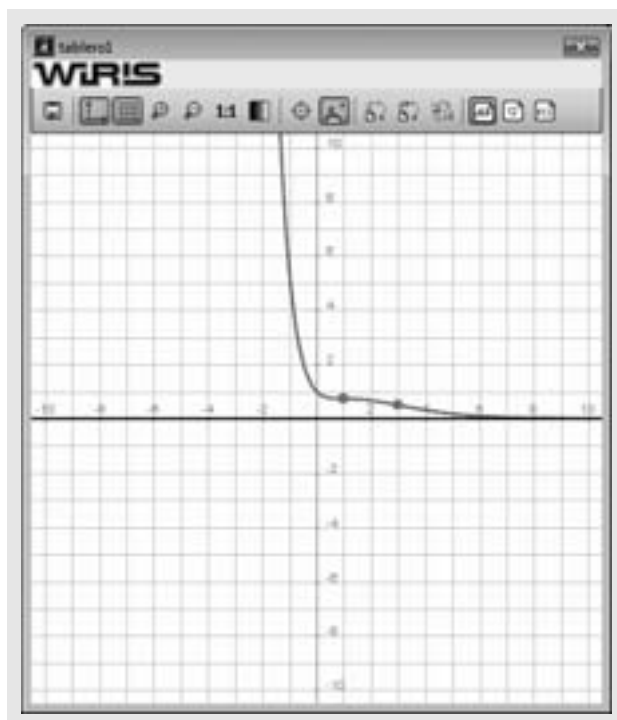
$$f(3) \rightarrow \frac{10}{e^3}$$

$$B = \text{punto}\left(3, \frac{10}{e^3}\right) \rightarrow \left(3, \frac{10}{e^3}\right)$$

$$f'''(2) \rightarrow \frac{1}{e^2}$$

Puntos de inflexión : $B\left(3, \frac{10}{e^3}\right)$

dibujar(B, {color = magenta, tamaño_punto = 8})



128. Dada la función

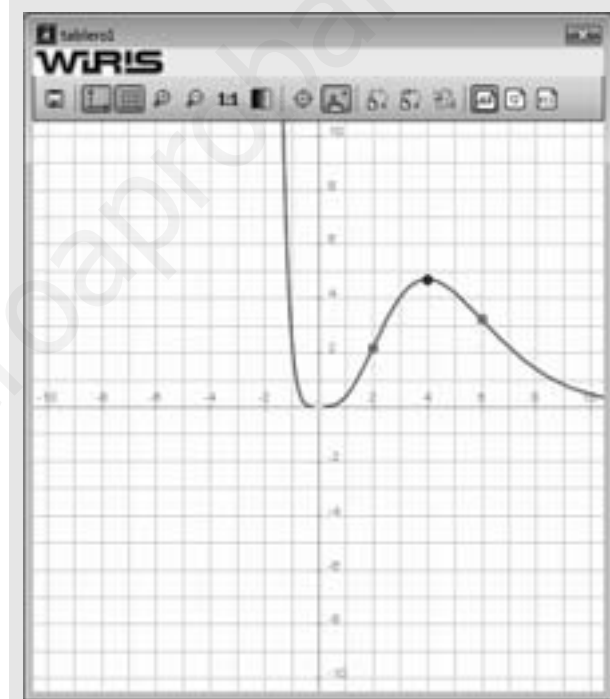
$$y = x^4 e^{-x}$$

- halla, si existen, los máximos y mínimos relativos. Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.
- halla los puntos de inflexión.

Solución:

```
Ejercicio 128
f(x) = x^4 * e^-x => x=>x^4 * e^-x
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})
8. Máximos y mínimos relativos :
f'(x) => {-x^4 + 4 * x^3} * e^-x
resolver(f'(x) = 0) => {{x=0}, {x=4}}
f(0) => 0
O = punto(0, 0) => (0, 0)
f''(x) => {x^4 - 8 * x^3 + 12 * x^2} * e^-x
f''(0) => 0
f'''(0) => 24
- Mínimo relativo : O(0, 0)
dibujar(O, {color = cian, tamaño_punto = 8})
f(4) => 256 / e^4
A = punto(4, 256 / e^4) => (4, 256 / e^4)
f'(x) => {x^4 - 8 * x^3 + 12 * x^2} * e^-x
f'(4) => -64 / e^4
- Máximo relativo : A(4, 0)
dibujar(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})
Monotonía :
f'(0) => 0
- Creciente : (0, 4)
- Decreciente : (-∞, 0) ∪ (4, +∞)
```

```
9. Puntos de inflexión :
f'(x) => {x^4 - 8 * x^3 + 12 * x^2} * e^-x
resolver(f'(x) = 0) => {{x=0}, {x=2}, {x=6}}
f(2) => 16 / e^2
B = punto(2, 16 / e^2) => (2, 16 / e^2)
f''(2) => -16 / e^2
f(6) => 1296 / e^6
C = punto(6, 1296 / e^6) => (6, 1296 / e^6)
f''(6) => -16 / e^2
Puntos de inflexión : B(2, 16 / e^2), C(6, 1296 / e^6)
dibujar(B, {color = magenta, tamaño_punto = 8})
dibujar(C, {color = magenta, tamaño_punto = 8})
```



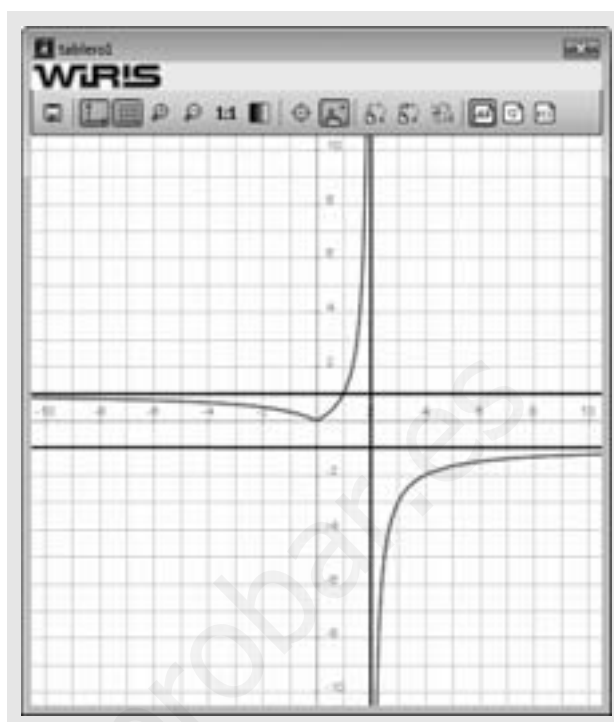
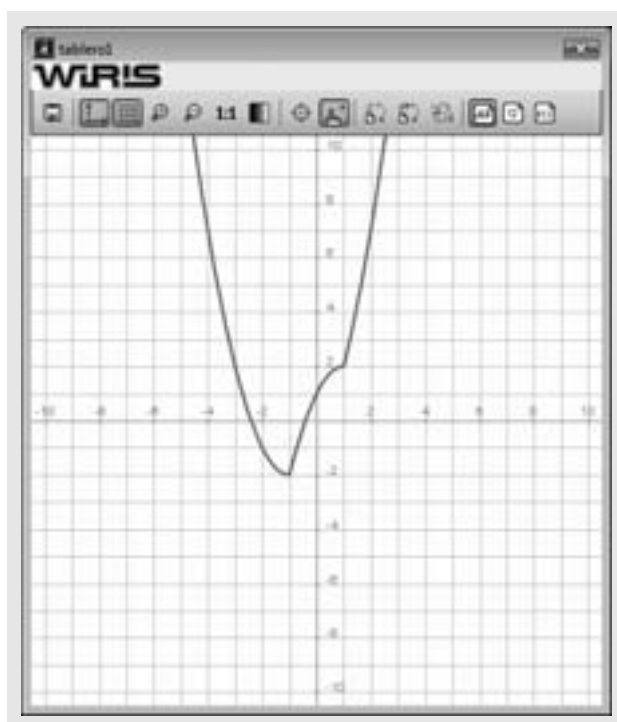
129. Dada la función:

$$f(x) = 2x + |x^2 - 1|$$

dibuja la gráfica de $f(x)$

Solución:

```
Ejercicio 129
f(x) = 2x + |x^2 - 1| => x=>|x^2 - 1| + 2 * x
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2})
```



130. Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x}$$

e indica su dominio, asíntotas e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

Ejercicio 130

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x} \Rightarrow x \mapsto \frac{1}{-x+2} \cdot |x|$$

dibujar($f(x)$, {color = rojo, anchura_linea = 2})

2. Dominio :

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - 2 = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

6. Asíntotas :

· Verticales : $x = 2$

dibujar($x = 2$, {color = verde, anchura_linea = 2})

· Horizontales :

$$h = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \Rightarrow 1$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \Rightarrow -1$$

dibujar($y = -1$, {color = verde, anchura_linea = 2})

dibujar($y = 1$, {color = verde, anchura_linea = 2})

· Oblicuas : no tiene, porque el grado del numerador no es uno mayor que el del denominador.

8. Monotonía :

$$f'(1) \Rightarrow 2$$

· Creciente : $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

· Decreciente : $(-\infty, 0)$