LÍMITES DE FUNCIONES. INDETERMINACIONES

1.- Dibuja la gráfica de una función que tenga los límites siguientes:
$\lim_{x\to -2^-} f(x)=5$; $\lim_{x\to -2^+} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to -\infty} f(x)=2$; $\lim_{x\to +\infty} f(x)=2$;
¿Qué asíntotas tiene la función?

2.- Representa una función que verifique los siguientes límites. ¿Qué asíntotas tiene?
$\lim_{x\to 3^-} f(x)=7$; $\lim_{x\to 3^+} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to +\infty} f(x)=1$;

3.- Dibuja la gráfica de una función que tenga como asíntota horizontal la recta y = 1, y como asíntotas verticales las rectas x = -1 y x = 1. ¿Puedes dibujar la gráfica de otra función distinta que cumpla lo mismo?

4.- Calcula los siguientes límites de funciones en un punto:

$a)\ \lim_{x\to 3}\left(\frac{x+5}{x-8}\right)$; $b)\ \lim_{x\to 8}\left(\frac{x+8}{\sqrt{x+1}+9}\right)$; $c)\ \lim_{x\to 8}\left(\frac{x+8}{2x-16}\right)$; $d)\ \lim_{x\to -1}\left(\frac{x+14}{x+1}\right)$;

5.- Cuando aparecen indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$, al calcular límites en un punto, se resuelven factorizando el numerador y el denominador para poder simplificar después. Calcula:

$a)\ \lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)$; $b)\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}\right)$; $c)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+3x^2-5x}{5x}\right)$; $d)\ \lim_{x\to -5}\left(\frac{x^3+125}{x+5}\right)$;

6.- Calcula los siguientes límites en el infinito:

a) $\lim_{x\to +\infty}\left(x^5-7x^3+3\right)$ y $\lim_{x\to -\infty}\left(x^5-7x^3+3\right)$; b) $\lim_{x\to +\infty}\left(5x^2-7x-1\right)$ y $\lim_{x\to -\infty}\left(5x^2-7x-1\right)$

c) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3}{4x^3-5x}\right)$ y $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3}{4x^3-5x}\right)$; d) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{2x^3+4x+4}\right)$ y $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{2}{2x^3+4x+4}\right)$

e) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{5}{x^2+2}\right)$ y $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{5}{x^2+2}\right)$

7.- Calcula los siguientes límites en el infinito de cocientes de polinomios (INDETERMINACIÓN $\frac{\infty}{\infty}$)

a) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-3x+4}{3x^2-5x+3}\right)$ y $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2-3x+4}{3x^2-5x+3}\right)$

b) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x^5+6x}{2x^5+8x+1}\right)$ y $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3x^5+6x}{2x^5+8x+1}\right)$

c) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x^3-5x}{4x^2-5x+2}\right)$ y $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3x^3-5x}{4x^2-5x+2}\right)$

d) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+x^2}{x^2-2x^3}\right)$ y $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x+x^2}{x^2-2x^3}\right)$

e) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x^4-3x^2}{1+x^4}\right)$ y $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{2x^4-3x^2}{1+x^4}\right)$

www.yoquieroaprobar.es

8.- Si sabemos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, ¿cuáles de estas expresiones son indeterminaciones al hallar sus límites en el infinito?

a) $f(x) \cdot g(x)$ b) $f(x) / g(x)$ c) $f(x) - g(x)$ d) $f(x)^{g(x)}$ e) $f(x) + g(x)$

9.- Comprueba que los siguientes límites son indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$, realiza las operaciones correspondientes y calcúlalos:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2 - 5x + 7}{x + 3} - 2x \right)$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2 - 5x + 7}{x + 3} - \frac{x^2 + 5}{x + 1} \right)$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x} - \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} \right)$

d) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x - x^2 + 3}{x - 1} + \frac{x^2 + 3}{x + 1} \right)$

e) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 2}{2} - \frac{x^3 + 2x^2}{2(x^2 + 1)} \right)$

10.- Calcula los cinco límites del ejercicio anterior, pero ahora para $x \to -\infty$.

11.- Cuando aparecen radicales en una indeterminación del tipo $\infty - \infty$ se multiplica y se divide por el conjugado, y se tiene en cuenta que $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$. Calcula:

a) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3} - 2x)$

b) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - x)$

c) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x + 4000} - \sqrt{x})$

d) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 1})$

e) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x)$

f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{x + 1} - x}$

g) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - x}$

12.- ¿Es $\frac{\infty}{0}$ una indeterminación? ¿ Y $\frac{0}{\infty}$? Comprueba tu respuesta calculando los límites en el infinito de las siguientes funciones:

$f(x) = \frac{6 + x}{2} : \frac{3x}{x^2 + 1}$ $g(x) = \frac{2x^2 + 1}{x} : \frac{7 + x}{x^2}$ $h(x) = \frac{3x^2 + 1}{x} : \frac{1}{2 - x^2}$

13.- Sabemos que $0 \cdot \infty$ es una indeterminación. Comprueba que puede dar resultados muy distintos, calculando los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x + 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{x + 6}{2} \right)$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{9x + 5}{x^2 - 2} \cdot \frac{5x^3}{x + 3} \right)$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3 - x}{x^2} \cdot \frac{5 + x + 6x^3}{3x + 2} \right)$

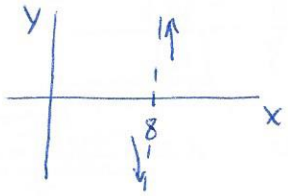
d) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{7 + x}{x^3} \cdot \frac{2x^2 + 1}{x} \right)$

www.yoquieroaprobar.es

4 a) $\lim_{x\to 3} \frac{x+5}{x-8} = \frac{3+5}{3-8} = \boxed{\frac{8}{-5}}$

b) $\lim_{x\to 8} \frac{x+8}{\sqrt{x+1}+9} = \frac{16}{\sqrt{9}+9} = \frac{16}{3+9} = \frac{16}{12} = \boxed{\frac{4}{3}}$

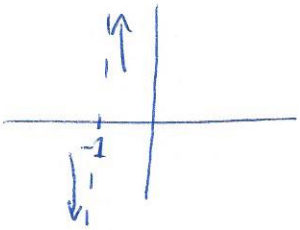
c) $\lim_{x\to 8} \frac{x+8}{2x-16} = \frac{8+8}{2\cdot 8-16} = \frac{16}{0} = \pm\infty$ indet.



$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 8^-} \frac{x+8}{2x-16} = \frac{7+8}{14-16} = \frac{+}{-} = \boxed{-\infty} \\ \lim_{x\to 8^+} \frac{x+8}{2x-16} = \frac{9+8}{2\cdot 9-16} = \frac{+}{+} = \boxed{+\infty} \end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to 8}$$

asíntota vertical en $x=8$

d) $\lim_{x\to -1} \frac{x+14}{x+1} = \frac{-1+14}{-1+1} = \frac{13}{0} = \pm\infty$ indet.



$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} \frac{x+14}{x+1} = \frac{-2+14}{-2+1} = \frac{+}{-} = \boxed{-\infty} \\ \lim_{x\to -1^+} \frac{x+14}{x+1} = \frac{0+14}{0+1} = \frac{+}{+} = \boxed{+\infty} \end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to -1}$$

5 a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{0}{0}$ indet $= \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}} =$

$= \lim_{x\to 3} x+3 = 3+3 = \boxed{6}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \frac{2^2-4\cdot 2+4}{2^2-4} = \frac{0}{0}$ indet $= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} =$

$= \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{2-2}{2+2} = \frac{0}{4} = \boxed{0}$

www.yoquieroaprobar.es

c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+3x^2-5x}{5x} = \frac{0+0-0}{0} = \frac{0}{0}$ indet $=$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x^2+3x-5)}{5\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x-5}{5} = \frac{0+0-5}{5} = \boxed{-1}$

d) $\lim_{x\to -5} \frac{x^3+125}{x+5} = \frac{(-5)^3+125}{-5+5} = \frac{0}{0}$ indet $=$ (*)

$x^3+125 = (x+5)(x^2-5x+25)$

	1	0	0	125
-5		-5	25	-125
	1	-5	25	0

$x^2-5x+25=0 \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25-100}}{2} \nexists$

(*) $= \lim_{x\to -5} \frac{\cancel{(x+5)}(x^2-5x+25)}{\cancel{x+5}} = (-5)^2-5(-5)+25 = 25+25+25 = \boxed{75}$

$\boxed{6}$ a) $\lim_{x\to\infty} x^5-7x^3+3 = \lim_{x\to\infty} x^5 = \boxed{\infty}$

$\lim_{x\to -\infty} x^5-7x^3+3 = \lim_{x\to -\infty} x^5 = \boxed{-\infty}$

b) $\lim_{x\to\infty} 5x^2-7x-1 = \lim_{x\to\infty} 5x^2 = \boxed{\infty}$

$\lim_{x\to -\infty} 5x^2-7x-1 = \lim_{x\to -\infty} 5x^2 = \boxed{\infty}$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{4x^3-5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{4x^3} = \frac{3}{\infty} = \boxed{0}$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{3}{4x^3-5x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3}{4x^3} = \frac{3}{-\infty} = \boxed{0}$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{2x^3+4x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2x^3} = \frac{2}{\infty} = \boxed{0}$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{2x^3+4x+4} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{2x^3} = \frac{2}{-\infty} = \boxed{0}$

www.yoquieroaprobar.es

e) $\lim_{x \to \infty} \frac{5}{x^2+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{5}{x^2} = \frac{5}{\infty} = \boxed{0}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x^2+2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x^2} = \frac{5}{\infty} = \boxed{0}$

$\boxed{7}$ a) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-3x+4}{3x^2-5x+3} = \frac{\infty}{\infty}$ indet $= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{3x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-3x+4}{3x^2-5x+3} = \frac{\infty}{\infty}$ indet $= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \boxed{\frac{1}{3}}$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^5+6x}{2x^5+8x+1} = \frac{\infty}{\infty}$ indet $= \lim_{x \to \infty} \frac{3\cancel{x^5}}{2\cancel{x^5}} = \boxed{\frac{3}{2}}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^5+6x}{2x^5+8x+1} = \frac{-\infty}{-\infty}$ indet $= \lim_{x \to -\infty} \frac{3\cancel{x^5}}{2\cancel{x^5}} = \boxed{\frac{3}{2}}$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3-5x}{4x^2-5x+2} = \frac{\infty}{\infty}$ indet $= \lim_{x \to \infty} \frac{3x^3}{4x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{4} = \boxed{\infty}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3-5x}{4x^2-5x+2} = \frac{-\infty}{\infty}$ indet $= \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3}{4x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{4} = \boxed{-\infty}$

d) $\lim_{x \to \infty} \frac{x+x^2}{x^2-2x^3} = \frac{\infty}{-\infty}$ indet $= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{-2x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{-2x} = \frac{1}{-\infty} = \boxed{0}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+x^2}{x^2-2x^3} = \frac{\infty}{\infty}$ indet $= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-2x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-2x} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$

e) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^4-3x^2}{1+x^4} = \frac{\infty}{\infty}$ indet $= \lim_{x \to \infty} \frac{2\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} = \boxed{2}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4-3x^2}{1+x^2} = \frac{\infty}{\infty}$ indet $= \lim_{x \to -\infty} \frac{2\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} = \boxed{2}$

www.yoquieroaprobar.es

$\boxed{8}$ a) $\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) = \infty \cdot \infty = \infty$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = \frac{\infty}{\infty}$ indet.

c) $\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = \infty - \infty$ indet.

d) $\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \infty^{\infty} = \infty$

e) $\lim_{x\to\infty} f(x) + g(x) = \infty + \infty = \infty$

$\boxed{9}$ a) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-5x+7}{x+3} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-5x+7}{x+3} - \lim_{x\to\infty} 2x =$

$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x} - \lim_{x\to\infty} 2x = \lim_{x\to\infty} 2x - \lim_{x\to\infty} 2x = \infty - \infty$ indet

$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-5x+7-2x(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2x^2}-5x+7-\cancel{2x^2}-6x}{x+3} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{-11x+7}{x+3} = \frac{-\infty}{\infty}$ indet $= \lim_{x\to\infty} \frac{-11\cancel{x}}{\cancel{x}} = \boxed{-11}$

b) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-5x+7}{x+3} - \frac{x^2+5}{x+1}\right) \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} =$

$= \lim_{x\to\infty} 2x - \lim_{x\to\infty} x = \infty - \infty$ indet $=$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2-5x+7)(x+1) - (x^2+5)(x+3)}{(x+3)(x+1)} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+2x^2-5x^2-5x+7x+7-x^3-3x^2-5x-15}{x^2+x+3x+3} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-6x^2-3x-8}{x^2+4x+3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} x = \boxed{\infty}$$

c) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x} - \frac{x^3+1}{x^2-1}\right) = \infty-\infty \text{ indet} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-x+1)(x^2-1)-x(x^3+1)}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^4}-\cancel{x^2}-x^3+\cancel{x}+\cancel{x^2}-1-\cancel{x^4}-\cancel{x}}{x^3-x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3-1}{x^3-x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{x^3} = \boxed{-1}$$

d) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-x^2+3}{x-1} + \frac{x^2+3}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-x^2+3}{x-1} + \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x+1} =$$

$$\overset{(\infty/\infty)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} -x + \lim_{x\to\infty} x = -\infty+\infty \text{ indet}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-x^2+3)(x+1)+(x^2+3)(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^3}-x^2+3x+\cancel{3}+\cancel{x^3}-x^2+3x-\cancel{3}}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+7x}{x^2-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{x^2} = \boxed{-1}$$

e) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2} - \frac{x^3+2x^2}{2(x^2+1)}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{2} - \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2}{2x^2+2} =$$

$$\overset{(\infty/\infty)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{2} - \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{2} - \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2} = \infty-\infty \text{ indet} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)(2x^2+2)-2(x^3+2x^2)}{2\cdot 2(x^2+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^3}+2x+\cancel{4x^2}+4-\cancel{2x^3}-\cancel{4x^2}}{4x^2+4}$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{4x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

$\boxed{10}$ a) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2-5x+7}{x+3} - 2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-5x+7}{x+3} - \lim_{x\to-\infty} 2x =$$

$$\overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x} - \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty \text{ indet} =$$

$$= \ldots (\text{igual que } 9a) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-11x+7}{x+3} = \frac{+\infty}{-\infty} \text{ indet} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-11\cancel{x}}{\cancel{x}} = \boxed{-11}$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2-5x+7}{x+3} - \frac{x^2+5}{x+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-5x+7}{x+3} - \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+5}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x} - \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2x - \lim_{x\to-\infty} x =$$

$$= -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty \text{ indet} = \ldots (\text{igual que } 9b) \ldots =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-6x^2-3x-8}{x^2+4x+3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = \boxed{-\infty}$$

c) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x} - \frac{x^3+1}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1}{x} - \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{x^2-1} =$$

$$\overset{(\infty/\infty)}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x} - \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x - \lim_{x\to-\infty} x = -\infty - (-\infty) =$$

$$= -\infty + \infty \text{ indet} = \ldots (\text{igual que } 9c) \ldots = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3-1}{x^3-x} = \frac{\infty}{-\infty} \text{ indet} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{x^3} = \boxed{-1}$$

www.yoquieroaprobar.es

d) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-x^2+3}{x-1}+\frac{x^2+3}{x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-x^2+3}{x-1}+\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x+1}=$

$\overset{(\infty/\infty)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}-x+\lim_{x\to-\infty}x=$

$=-(-\infty)+(-\infty)=\infty-\infty$ indet $=$ ... igual que 9 d ... $=$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+7x}{x^2-1}=\frac{-\infty}{\infty}$ indet $=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x^2}=\boxed{-1}$

e) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+2}{2}-\frac{x^3+2x^2}{2(x^2+1)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{2}-\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2}{2x^2+2}=$

$\overset{\infty/\infty}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{2}-\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{2}-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2}=$

$=-\infty-(-\infty)=-\infty+\infty$ indet $=$ igual que 9e ... $=$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{4x^2+4}=\frac{-\infty}{\infty}$ indet $=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{4x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{4x}=\frac{2}{-\infty}=\boxed{0}$

$\boxed{11}$ a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-3}-2x\right)=\infty-\infty$ indet $=$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-3}-2x\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{4x^2-3}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-3}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3-4x^2}{\sqrt{4x^2-3}+2x}=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{4x^2-3}+2x}=\frac{-3}{\infty}=\boxed{0}$

b) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)=\infty-\infty \text{ indet}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}-x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-x}+x}=\frac{-\infty}{\infty}\text{ indet}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\cancel{x}}{2\cancel{x}}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

c) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+4000}-\sqrt{x}\right)=\infty-\infty\text{ indet}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+4000}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x+4000}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+4000}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}+4000-\cancel{x}}{\sqrt{x+4000}+\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{4000}{\infty+\infty}=\boxed{0}$$

d) $$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}=\infty-\infty\text{ indet}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x-\cancel{x^2}-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\infty}{\infty}\text{ indet}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x}=\boxed{1}$$

e) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\infty-\infty\text{ indet}=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\frac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-1}+x}=\frac{-1}{\infty}=\boxed{0}$$

www.yoquieroaprobar.es

$\boxed{13}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{x^2+1}\cdot\dfrac{x+6}{2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{x^2+1}\right)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+6}{2} =$

$= 0\cdot\infty$ indet $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+18x+x+6}{2x^2+2} = \dfrac{\infty}{\infty}$ indet $=$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{2x^2} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x+5}{x^2-2}\cdot\dfrac{5x^3}{x+3}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x+5}{x^2-2}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3}{x+3} =$

$= 0\cdot\infty = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{45x^4+25x^3}{x^3+3x^2-2x-6} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{45x^4}{x^3} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} 45x = \boxed{+\infty}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-x}{x^2}\cdot\dfrac{5+x+6x^3}{3x+2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+x+6x^3}{3x+2} =$

$= 0\cdot\infty$ indet $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15+3x+18x^3-5x-x^2-6x^3}{3x^3+2x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3-x^2-2x+15}{3x^3+2x^2} = \dfrac{\infty}{\infty}$ indet $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12\cancel{x^3}}{3\cancel{x^3}} = \boxed{4}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7+x}{x^3}\cdot\dfrac{2x^2+1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7+x}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x} =$

$= 0\cdot\infty$ indet $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^2+7+2x^3+x}{x^4} = \dfrac{\infty}{\infty}$ indet $=$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{x^4} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{\infty} = \boxed{0}$

www.yoquieroaprobar.es