

SISTEMAS DE DOS INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son los formados por dos inecuaciones de primer grado con una incógnita. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 4x - 2 > 3(2x + 5) \\ \frac{x}{4} - \frac{3x - 1}{2} \geq 6 - x \end{cases}$$

La **solución** del sistema es el conjunto de números reales que es a la vez solución de las dos inecuaciones que lo forman. Es decir, la intersección de las soluciones de las inecuaciones.

Para hallar la solución de un sistema, como el del ejemplo:

1. Se resuelve cada inecuación de forma independiente.

Primera inecuación: $4x - 2 > 3(2x + 5)$

$$4x - 2 > 6x + 15$$

$$4x - 6x > 15 + 2$$

$$-2x > 17$$

$$2x < -17$$

$$x < \frac{-17}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{Solución: } \left(-\infty, \frac{-17}{2} \right)$$

Segunda inecuación: $\frac{x}{4} - \frac{3x - 1}{2} \geq 6 - x$

$$\frac{x}{4} - \frac{6x - 2}{4} \geq \frac{24 - 4x}{4}$$

$$4 \cdot \left[\frac{x}{4} - \frac{6x - 2}{4} \geq \frac{24 - 4x}{4} \right]$$

$$x - (6x - 2) \geq 24 - 4x$$

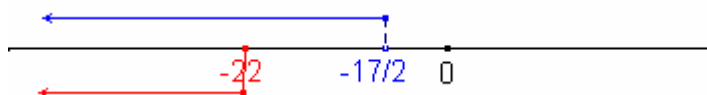
$$x - 6x + 2 \geq 24 - 4x$$

$$x - 6x + 4x \geq 24 - 2$$

$$-x \geq 22$$

$$x \leq -22 \quad \Rightarrow \quad \text{Solución: } (-\infty, -22]$$

2. Se halla la intersección de las soluciones obtenidas para cada inecuación. Representando las soluciones en la recta real, se puede ver donde coinciden:



NOTA: Observa que se ha dibujado con línea discontinua el segmento que une el punto $\frac{-17}{2}$ con el vector. Con ello se quiere indicar que ese punto no pertenece a la solución de la ecuación. En adelante se seguirá utilizando.

Las soluciones coinciden en el intervalo: $(-\infty, -22]$.

Por tanto **la solución del sistema** es: $(-\infty, -22]$

CASO PARTICULAR:

Algunas inecuaciones con fracciones algebraicas dan lugar a sistemas de inecuaciones del tipo anterior. En general, si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, se puede escribir en la forma: $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \text{ y } \frac{P(x)}{Q(x)} < 0.$$

Para resolverlos, se tiene en cuenta la regla de los signos de la división y que el denominador de una fracción no puede ser igual a 0. Se obtienen las siguientes situaciones:

CASO 1

$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ y $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$. Para que el cociente sea positivo, $P(x)$ y $Q(x)$ deben tener el mismo signo, es decir:

$$\left. \begin{array}{l} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \end{array} \right\} \text{ o } \left. \begin{array}{l} P(x) \leq 0 \\ Q(x) < 0 \end{array} \right\} \text{ cuando la inecuación es } \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{array} \right\} \text{ o } \left. \begin{array}{l} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0 \end{array} \right\} \text{ cuando la inecuación es } \frac{P(x)}{Q(x)} > 0$$

CASO 2

$\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ y $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$. Para que el cociente sea negativo, $P(x)$ y $Q(x)$ deben tener distinto signo, es decir:

$$\left. \begin{array}{l} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{array} \right\} \text{ o } \left. \begin{array}{l} P(x) \leq 0 \\ Q(x) > 0 \end{array} \right\} \text{ cuando la inecuación es } \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{array} \right\} \text{ o } \left. \begin{array}{l} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0 \end{array} \right\} \text{ cuando la inecuación es } \frac{P(x)}{Q(x)} < 0$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1º) Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \frac{4}{3} - (9 - 5x) < \frac{2x + 7}{6} \\ 2(3x - 4) - 9x \geq 10 - 4x \end{array} \right\}$$

$$\text{Primera inecuación: } \frac{4}{3} - (1 - x) < \frac{2x + 7}{6}$$

$$\frac{4}{3} - 1 + x < \frac{2x + 7}{6}$$

$$\frac{8}{6} - \frac{6}{6} + \frac{6x}{6} < \frac{2x + 7}{6}$$

$$8 - 6 + 6x < 2x + 7$$

$$6x - 2x < 7 - 8 + 6$$

$$4x < 5$$

$$x < \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{Solución: } \left(-\infty, \frac{5}{4}\right)$$

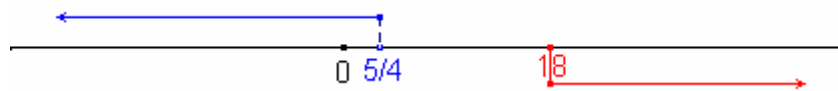
$$\text{Segunda inecuación: } 2(3x - 4) - 9x \geq 10 - 4x$$

$$6x - 8 - 9x \geq 10 - 4x$$

$$6x - 9x + 4x \geq 10 + 8$$

$$x \geq 18 \quad \Rightarrow \quad \text{Solución: } [18, +\infty)$$

Representando las soluciones en la recta real:



Se observa que las soluciones no tienen elementos comunes.

Por tanto, el sistema **no tiene solución**.

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+2}{5} - \frac{3}{4} \leq x - \frac{3-2x}{10} \\ 2 - (4-9x) < 6 + 5x \end{array} \right\}$$

$$\text{Primera inecuación: } \frac{x+2}{5} - \frac{3}{4} \leq x - \frac{3-2x}{10}$$

$$\frac{4x+8}{20} - \frac{15}{20} \leq \frac{20x}{20} - \frac{6-4x}{20}$$

$$4x + 8 - 15 \leq 20x - (6 - 4x)$$

$$4x + 8 - 15 \leq 20x - 6 + 4x$$

$$4x - 20x - 4x \leq -6 - 8 + 15$$

$$-20x \leq 1$$

$$20x \geq -1$$

$$x \geq \frac{-1}{20} \quad \Rightarrow \quad \text{Solución: } \left[\frac{-1}{20}, +\infty\right)$$

$$\text{Segunda inecuación: } 2 - (4 - 9x) < 6 + 5x$$

$$2 - 4 + 9x < 6 + 5x$$

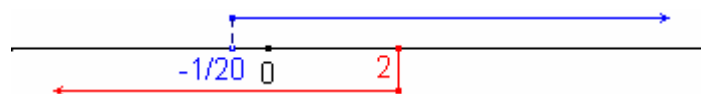
$$9x - 5x < 6 - 2 + 4$$

$$4x < 8$$

$$x < \frac{8}{4}$$

$$x < 2 \quad \Rightarrow \quad \text{Solución: } (-\infty, 2)$$

Representando las soluciones en la recta real:



La intersección de las soluciones es el intervalo: $\left[\frac{-1}{20}, 2\right]$

Por tanto, la **solución del sistema** es: $\left[\frac{-1}{20}, 2\right]$

$$c) \begin{cases} 3(1-2x) \geq 7-5x \\ 2x+14 \geq 2-x \end{cases}$$

Primera inecuación: $3(1-2x) \geq 7-5x$

$$3-6x \geq 7-5x$$

$$-6x+5x \geq 7-3$$

$$-x \geq 4$$

$$x \leq -4 \quad \Rightarrow \quad \text{Solución: } (-\infty, -4]$$

Segunda inecuación: $2x+14 \geq 2-x$

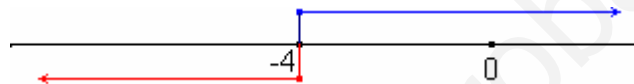
$$2x+x \geq 2-14$$

$$3x \geq -12$$

$$x \geq \frac{-12}{3}$$

$$x \geq -4 \quad \Rightarrow \quad \text{Solución: } [-4, +\infty)$$

Representando las soluciones en la recta real:



La intersección de las soluciones es el punto -4 .

Por tanto, la **solución del sistema** es: -4 .

EJERCICIO

Resuelve los siguientes sistemas de dos inecuaciones lineales con una incógnita:

$$1. \begin{cases} 3x+2 \leq 10 \\ x-5 > 1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x-4 < 1+5x-3 \\ 4+x \leq -x \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x-5 \geq 6 \\ 3x+1 \leq 15 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 4(x+1)-(2-x) > 1+3x-6 \\ 10- \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4x-3 < 1 \\ x+6 > 2 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2(x+1)-7 < 9x \\ 3+5x > 4(x-2)+3x \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x-2 > -7 \\ 5-x < 1 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2-5x+4(1-x) \geq 6-2x \\ 7x+2-(1+x) > 3x+9 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 5-x < -12 \\ 10-2x < 3x-3 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x-3 > 0 \\ 5x+1 < 0 \end{cases}$$

$$29. \left. \begin{aligned} \frac{3x+2}{5} - \frac{x-1}{2} &\geq 1-x \\ x+2-3(1-2x) &> 6(x+1)-2x \end{aligned} \right\}$$

$$30. \left. \begin{aligned} x+3-(2-4x)+1 &\geq 0 \\ 2(x-5) &\geq x+6 \end{aligned} \right\}$$

$$31. \left. \begin{aligned} 2(x-1)+3(x-4) &< 0 \\ 1-(6-x) &> x+2 \end{aligned} \right\}$$

$$32. \left. \begin{aligned} 3x+1-2(x+5) &\geq 4 \\ \frac{2x+1}{5} - \frac{3-x}{10} &> 2 \end{aligned} \right\}$$

$$33. \left. \begin{aligned} 4(x+1)+2(x+2) &\leq 6 \\ 2x+5-\frac{x}{4}+1 &\leq 3+x \end{aligned} \right\}$$

$$34. \left. \begin{aligned} \frac{2x-1}{3} - \frac{5x+2}{4} &< 1 \\ 3(x-2)+4(x+3) &> 0 \end{aligned} \right\}$$

$$35. \left. \begin{aligned} \frac{x}{5} - \frac{2x}{4} &< 1 - \frac{x}{2} \\ \frac{2x-3}{6} &\leq 3-x \end{aligned} \right\}$$

$$36. \left. \begin{aligned} x+9-(2-x) &\leq 3 - \frac{x}{2} \\ 4 + \frac{x-1}{2} &< 0 \end{aligned} \right\}$$

$$37. \left. \begin{aligned} 4+x-1 &\leq 3-(1+2x) \\ 5-2(1-4x) &> 6-5(2x+1) \end{aligned} \right\}$$

$$38. \left. \begin{aligned} \frac{x+6}{3} - \frac{x-1}{9} &< 2-x \\ \frac{6+2x}{4} &< \frac{3x+1}{8} \end{aligned} \right\}$$

$$39. \left. \begin{aligned} \frac{8x+9}{6} - \frac{3x}{2} &\leq 1-x \\ 2(1-5x)+9x-6 &< 0 \end{aligned} \right\}$$

$$40. \left. \begin{aligned} 2x + \frac{7-x}{5} &> 1 - \frac{3x-2}{3} \\ 9-(x-2) &< \frac{1+x}{4} - \frac{x}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$41. \left. \begin{aligned} \frac{2x+1}{8} - \frac{x-2}{4} &\geq 0 \\ \frac{3+x}{10} - \frac{1}{5} &\geq \frac{x-2}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$42. \left. \begin{aligned} 6(1-x)+2(x-5) &\leq 9+x-(1+3x) \\ 2-(x+4) &\geq 5(2-x)+6x+4 \end{aligned} \right\}$$

$$43. \left. \begin{aligned} \frac{x}{3} - \frac{1}{2} &> \frac{x+4}{6} \\ \frac{5-3x}{2} &< 1 - \frac{x-7}{8} \end{aligned} \right\}$$

$$44. \left. \begin{aligned} 7 - \frac{x+1}{4} &\leq -\frac{1+2x}{6} \\ 3(10-2x) &< 7x-5(3x-3) \end{aligned} \right\}$$

$$45. \left. \begin{aligned} \frac{3x-2}{9} - \frac{5x+1}{3} &\geq 0 \\ \frac{6-2(3-x)}{8} &< 1+x - \frac{x+1}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$46. \left. \begin{aligned} 5x - \frac{1-x}{3} &\leq \frac{x+4}{6} - (2-x) \\ \frac{1}{2}(x-6) + \frac{1}{3}(2+x) &> 3 + \frac{4x-2}{6} \end{aligned} \right\}$$

$$47. \left. \begin{aligned} 2(3x-5)-x+9 &\geq x - \frac{x-2}{2} \\ 2+4x-6 &> 5x-4(3+x) \end{aligned} \right\}$$

$$48. \left. \begin{aligned} \frac{7-x}{2} - \frac{3+2x}{4} &< \frac{5}{6} - \frac{x-3}{8} \\ \frac{2x-3(5+x)}{30} &< \frac{8+6x}{15} \end{aligned} \right\}$$

$$49. \left. \begin{aligned} \frac{3}{4}(1-x) + \frac{2}{5}(x+3) &> \frac{3x}{10} - \frac{x+1}{2} \\ \frac{2}{7}x - \frac{3}{2}(x+4) &> \frac{5-x}{14} + \frac{x}{7} \end{aligned} \right\}$$