

INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

1

Resuelve las siguientes inecuaciones lineales:

a) $3x - 2(x + 1) + 7(x + 2) < \frac{x}{5}$

b) $\frac{x+5}{3} - \frac{8x+3}{4} - x \geq 8$

2

Resuelve las siguientes inecuaciones lineales:

a) $\frac{2x-1}{3} - 2 < x - \frac{x+1}{2}$

b) $\frac{x-1}{3} \geq 2 + \frac{3-x}{6}$

c) $\frac{x-4}{2} - \frac{x+1}{3} \leq \frac{1}{6}$

d) $\frac{2(x-3)}{3} - \frac{x+1}{3} > x-2$

INECUACIONES POLINÓMICAS CON UNA INCÓGNITA.

3

Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas:

a) $x^2 + 3x \leq 0$

b) $2x + 5 \leq x^2 - 2x - 16$

c) $x^2 + 3x - 6 > 8 - 2x$

d) $-x^2 + 4x - 7 < 0$

e) $4x^2 - 16x < 0$

f) $x^4 + 12x^3 - 64x^2 > 0$

g) $x^4 - 25x^2 - 144 < 0$

4

Resuelve estas inecuaciones polinómicas:

a) $x^3 - 2x^2 - 8x < 0$

b) $2x^3 + x^2 - 22x + 24 < 0$

c) $4x^5 - 27x^4 + 50x^3 - 24x^2 \geq 0$

INECUACIONES RACIONALES.

5 Resuelve las siguientes inecuaciones racionales:

a) $\frac{x+7}{3-x} \geq 0.$

b) $\frac{x+2}{x^2} \leq 0$

c) $\frac{3x+3}{x+2} \leq 0$

d) $\frac{x^2-1}{-x^2+2x-1} \leq 0$

e) $\frac{x^2-1}{x^2-4} \leq 0$

6 Resuelve estas inecuaciones racionales:

a) $\frac{2x^2-18}{x^2-1} > 0$

b) $\frac{x^2-6x-27}{x^2-13x+40} < 0$

SISTEMAS DE INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS.

7 Resuelve gráficamente las siguientes inecuaciones y sistemas con dos incógnitas:

a) $2x + y \leq 3$

b) $3x + 2y \leq 1$

c) $\begin{cases} 3x+y \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y \leq 1 \\ x-y \leq 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x+y \geq -2 \\ y \leq 4 \end{cases}$

8 Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y \leq 3 \\ y \geq -2 \end{cases}$

9 Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x-y \leq 1 \\ 5x+3y \leq 15 \end{cases}$

10 Resuelve gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones:

a)
$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 0 \leq x \leq 6 \\ x \geq y \\ y \geq 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 120 \\ 0 \leq y \leq 100 \\ x + y \leq 150 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y - x \leq 2 \\ x + 5y \geq 10 \\ x + 2y \leq 16 \\ 2x + y \leq 20 \end{cases}$$

SOLUCIONES.

1 a)
$$3x - 2(x+1) + 7(x+2) < \frac{x}{5}$$

$$3x - 2x - 2 + 7x + 14 < \frac{x}{5} \quad 8x + 12 < \frac{x}{5}$$

$$\frac{40x + 60}{5} < \frac{x}{5} \quad 39x < -60 \quad x < \frac{-60}{39}$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{-60}{39}\right)$$

b)
$$\frac{x+5}{3} - \frac{8x+3}{4} - x \geq 8$$

$$\frac{4(x+5)}{12} - \frac{3(8x+3)}{12} - \frac{12x}{12} \geq \frac{96}{12}$$

$$4x + 20 - 24x - 9 - 12x \geq 96 \quad -32x \geq 85$$

$$x \leq \frac{85}{-32}$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{-85}{32}\right]$$

2 a) $2(2x-1)-12 < 6x-3(x+1) \Rightarrow 4x-2-12 < 6x-3x-3 \Rightarrow x < 11 \rightarrow \text{intervalo } (-\infty, 11)$

b) $2(x-1) \geq 12+3-x \Rightarrow 2x-2 \geq 12+3-x \Rightarrow 3x \geq 17 \Rightarrow x \geq \frac{17}{3} \rightarrow \text{Intervalo } \left[\frac{17}{3}, +\infty\right)$

c) $3(x-4)-2(x+1) \leq 1 \Rightarrow 3x-12-2x-2 \leq 1 \Rightarrow x \leq 15 \rightarrow \text{Intervalo } (-\infty, 15]$

d)

$2(x-3)-(x+1) > 3(x-2) \Rightarrow 2x-6-x-1 > 3x-6 \Rightarrow -1 > 2x \Rightarrow x < \frac{-1}{2} \rightarrow \text{Intervalo } \left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$

3

$$x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = -3$$

a)

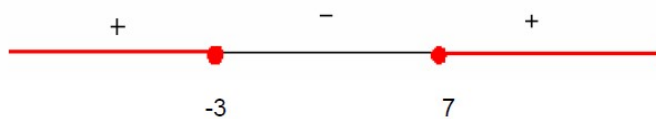


Solución: $x \in (-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$

b) Reducimos a una ecuación de segundo grado y calculamos sus soluciones:

$$0 \leq x^2 - 2x - 16 - 2x - 5 \rightarrow x^2 - 4x - 21 \geq 0$$

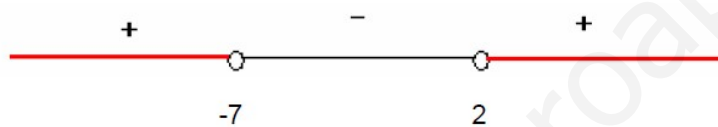
$$x^2 - 4x - 21 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{4 \pm 10}{2} \quad f \quad \begin{matrix} 7 \\ -3 \end{matrix}$$



La solución es $(-\infty, -3] \cup [7, +\infty)$.

c) $x^2 + 3x - 6 > 8 - 2x \rightarrow x^2 + 5x - 14 > 0$

$$\text{Resolvemos la ecuación } x^2 + 5x - 14 = 0: x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{-5 \pm 9}{2} \quad f \quad \begin{matrix} 2 \\ -7 \end{matrix}$$



Solución: $x \in (-\infty, -7) \cup (2, +\infty)$

d) $-x^2 + 4x - 7 < 0$

$$x^2 - 4x + 7 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-12}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$$P(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 - 7 < 0$$

$$S = \mathbb{R}$$

Infinitas soluciones.

e) $4x^2 - 16x < 0$

$$4x^2 - 16x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$$

La solución es el intervalo $(0, 4)$.



f) $x^4 + 12x^3 - 64x^2 > 0$ sacamos factor común x

$$x^2 (x^2 + 12x - 64) > 0$$

Como el primer factor es siempre positivo, sólo tendremos que estudiar el signo del 2º factor.

$$x^2 + 12x - 64 = 0$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 256}}{2} = \frac{-12 \pm 20}{2} = \begin{matrix} \nearrow x_2 = 4 \\ \searrow x_3 = -16 \end{matrix}$$



$$P(-17) = (-17)^2 + 12 \cdot 17 - 64 > 0$$

$$P(0) = 0^2 + 12 \cdot 0 - 64 < 0$$

$$P(5) = 5^2 + 12 \cdot 5 - 64 > 0$$



$$(-\infty, -16] \cup [4, \infty)$$

g) $x^4 - 25x^2 - 144 < 0$

$$x^4 - 25x^2 - 144 = 0$$

$$x^2 = t$$

$$t^2 - 25t - 144 = 0$$

$$t = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{matrix} \nearrow t_1 = 16 \\ \searrow t_2 = 9 \end{matrix}$$

$$x^2 = 16 \quad x = \pm \sqrt{16} \quad \begin{matrix} \nearrow x_1 = 4 \\ \searrow x_2 = -4 \end{matrix}$$

$$x^2 = 9 \quad x = \pm \sqrt{9} \quad \begin{matrix} \nearrow x_1 = 3 \\ \searrow x_2 = -3 \end{matrix}$$



$$(-4, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, 4)$$

4

$$a) x^3 - 2x^2 - 8x < 0$$

$$x(x^2 - 2x - 8) < 0$$

$$x(x-4)(x+2) < 0$$

	$-\infty$	-2	0	$+4$	∞
x	-	-	+	+	
$x-4$	-	-	-	+	
$x+2$	-	+	+	+	
Solución	-	+	-	+	

$$x \in (-\infty, -2) \cup (0, 4)$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

$$\text{Raíces: } x=0 \quad x=4 \quad x=-2$$

$$b) 2x^3 + x^2 - 22x + 24 < 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 1 & -22 & 24 \\ & & 4 & 10 & -24 \\ \hline & 2 & 5 & -12 & 0 \end{array}$$

$$\text{Raíces: } 2, \frac{3}{2}, -4$$

$$2(x-2)(x-\frac{3}{2})(x+4) < 0$$

$$x \in (-\infty, -4) \cup (\frac{3}{2}, 2)$$

$$2x^2 + 5x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4} = \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ -\frac{16}{4} = -4 \end{cases}$$

	$-\infty$	-4	$\frac{3}{2}$	2	∞
$x-2$	-	-	-	+	
$x-\frac{3}{2}$	-	-	+	+	
$x+4$	-	+	+	+	
Solución	-	+	-	+	

$$c) 4x^5 - 27x^4 + 50x^3 - 24x^2 \geq 0$$

$$x^2 \cdot (4x^3 - 27x^2 + 50x - 24) \geq 0$$

$$\text{Raíces } 2, 3, 16 \text{ y } 0 \text{ doble}$$

$$x^2 \geq 0 \text{ para todo valor de } x$$

	$-\infty$	2	3	16	∞
$x-2$	-	+	+	+	
$x-3$	-	-	+	+	
$x-16$	-	-	-	+	
Solución	-	+	-	+	

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 4 & -27 & 50 & -24 \\ & & 8 & -38 & 24 \\ \hline & 4 & -19 & 12 & 0 \end{array}$$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{19 \pm 13}{2} = \begin{cases} 16 \\ 3 \end{cases}$$

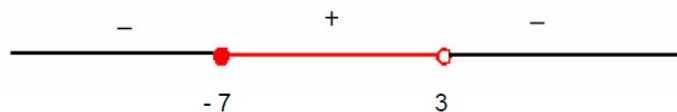
$$x^2 \cdot 4(x-2)(x-3)(x-16) \geq 0$$

$$x \in [2, 3] \cup [16, \infty)$$

- a) Igualamos por separado numerador y denominador a cero

$$x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \text{ (pintado)}$$

$$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ (sin pintar)}$$

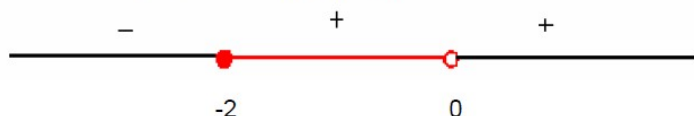


Solución: $x \in [-7, 3)$.

- b) Se igualan, por separado, numerador y denominador a cero:

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ (pintado)}$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (sin pintar)}$$



Por tanto, la solución es $(-\infty, -2]$.

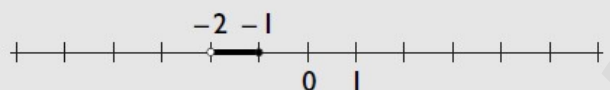
- c)

Raíz del numerador: $x = -1$

Raíz del denominador: $x = -2$

Para $x = 0 \Rightarrow 3/2$ que no es ≤ 0

$$(-2, -1] = \{x \in \mathbb{R}, -2 < x \leq -1\}$$



- d)

$$\frac{x^2 - 1}{-x^2 + 2x - 1} \leq 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

$$-x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$-(x - 1)^2$$

$$\frac{x^2 - 1}{-(x - 1)^2} \leq 0$$

$$x \neq 1$$

↓

+

El binomio elevado al cuadrado es siempre positivo, pero al tener delante el signo menos, resultará que el denominador será siempre negativo.

$$\frac{x^2 - 1}{-1} \leq 0$$

$$x \neq 1$$

Multiplicando por -1 :

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$x \neq 1$$



$$(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$$

e) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \leq 0$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \leq 0$$

$$x \neq \pm 2$$



$$[-2, -1] \cup (1, 2)$$

6

a) $\frac{2x^2 - 18}{x^2 - 1} > 0$

$\frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 1} > 0$

$\frac{2(x-3)(x+3)}{(x-1)(x+1)} > 0$

Numerator: $2x^2 - 18 = 0 \quad x = \pm 3$

Denominator: $x^2 - 1 = 0 \quad x = \pm 1$

$x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, \infty)$

	$-\infty$	-3	-1	1	3	∞
$x-3$	-	-	-	-	+	
$x+3$	-	+	+	+	+	
$x-1$	-	-	-	+	+	
$x+1$	-	-	+	+	+	
Solución	+	-	+	-	+	

$$b) \frac{x^2 - 6x - 27}{x^2 - 13x + 40} < 0$$

$$\text{Numerador: } x^2 - 6x - 27 = 0 \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{2} = \frac{6 \pm 12}{2} = \begin{cases} 9 \\ -3 \end{cases}$$

$$\text{Denominador: } x^2 - 13x + 40 = 0 \quad x = \frac{13 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{13 \pm 3}{2} = \begin{cases} 8 \\ 5 \end{cases}$$

$$\frac{(x-9)(x+3)}{(x-8)(x-5)} < 0$$

$$x \in (-3, 5) \cup (8, 9)$$

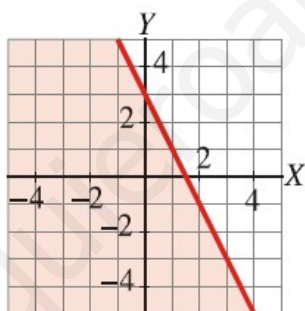
	$-\infty$	-3	5	8	9	∞
$x-9$	-	-	-	-	+	+
$x+3$	-	+	+	+	+	+
$x-8$	-	-	-	+	+	+
$x-5$	-	-	+	+	+	+
Solución	+	-	-	+	-	+

7

a) $2x + y \leq 3$ es lo mismo que $2x + y - 3 \leq 0$.

Representamos la recta $2x + y - 3 = 0$ ($y = -2x + 3$) y vemos que divide el plano en dos mitades.

Tomamos un punto cualquiera, por ejemplo $(0, 0)$. En él, $2 \cdot 0 + 0 \leq 3$, se cumple la desigualdad. Por tanto, las soluciones de la inecuación $2x + y - 3 \leq 0$ son todos los puntos de la región señalada, incluida la recta:

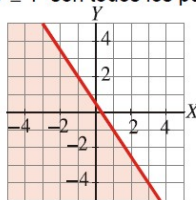


b) $3x + 2y \leq 1$ es lo mismo que $3x + 2y - 1 \leq 0$.

Representamos la recta $3x + 2y - 1 = 0$ ($y = -\frac{3x+1}{2}$) y vemos que divide el plano en dos mitades.

Tomamos un punto cualquiera, por ejemplo, $(0, 0)$. Vemos que cumple la desigualdad: $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 1$.

Por tanto, las soluciones de la inecuación $3x + 2y \leq 1$ son todos los puntos de la región señalada, incluida la recta:



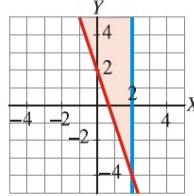
c) $3x + y \geq 2$ es lo mismo que $3x + y - 2 \geq 0$.

Representamos las rectas $\begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ x = 2 \end{cases} \quad (y = -3x + 2)$

Sustituyendo (2, 1) en la desigualdad $3x + y \geq 2$, vemos que la cumple: $3 \cdot 2 + 1 \geq 2$.

Además, $x \leq 2$ corresponde a los puntos que se sitúan a la izquierda de la recta $x = 2$ (o sobre ella).

Tomando las soluciones comunes a las dos desigualdades, llegamos al recinto solución del sistema (la parte coloreada y las semirrectas que lo limitan):



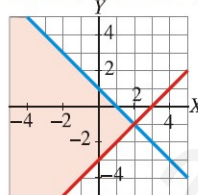
d)

$x + y \leq 1$ es lo mismo que $x + y - 1 \leq 0$

$x - y \leq 3$ es lo mismo que $x - y - 3 \leq 0$

Representamos las dos rectas: $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (y = -x + 1) \\ (y = x - 3) \end{matrix}$

Sustituyendo el punto (0, 0) en las desigualdades, vemos que se cumplen. Y si tenemos en cuenta que las soluciones del sistema son la soluciones comunes a ambas inecuaciones, obtenemos que las soluciones del sistema son los puntos de la zona coloreada (incluyendo las semirrectas que la limitan):

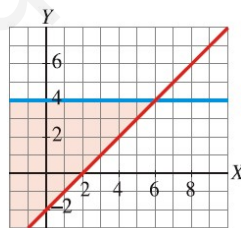


e) $-x + y \geq -2$ es lo mismo que $-x + y + 2 \geq 0$.

Representamos las rectas: $\begin{cases} -x + y + 2 = 0 \\ y = 4 \end{cases} \quad (y = x - 2)$

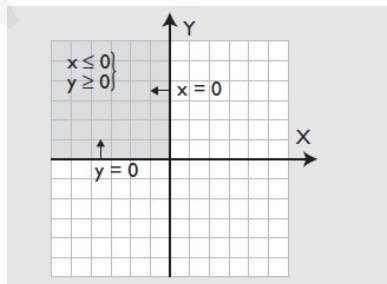
Si sustituimos el punto (0, 0) en las dos desigualdades, vemos que se cumplen: $\begin{cases} 0 + 0 \geq -2 \\ 0 \leq 4 \end{cases}$

Por tanto, las soluciones del sistema corresponden al recinto coloreado (incluyendo las dos semirrectas que lo limitan):

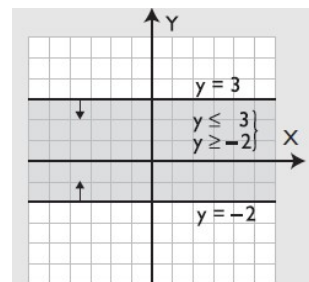


8

a)



b)



9

Resolvemos cada inecuación por separado.

1º Inecuación

$$x - y \leq 1$$

x	0	1
y	-1	0

□ Dibujamos la recta $x - y = 1$. Damos dos valores a la x

Elegimos el origen (0, 0)

$$x - y \leq 1$$

$$(0, 0) \Rightarrow 0 - 0 \leq 1$$

$0 \leq 1$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

2º Inecuación

$$5x + 3y \leq 15$$

□ Dibujamos la recta $5x + 3y = 15$. Damos dos valores a la x

x	0	3
y	5	0

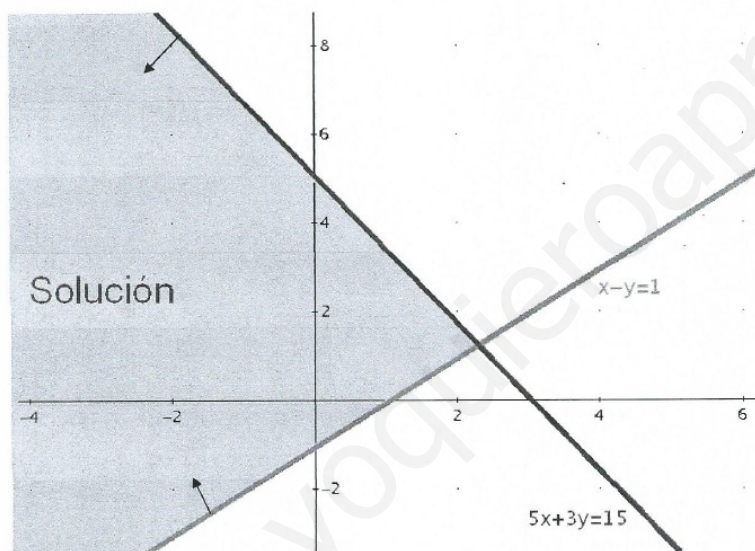
Elegimos el origen (0, 0)

$$5x + 3y \leq 15$$

$$(0, 0) \Rightarrow 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 15$$

$0 \leq 15$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

Gráficamente



10

$$x + y \leq 10$$

a)

□ Dibujamos la recta $x + y = 10$. Damos dos valores a la x

x	0	10
y	10	0

□ Elegimos el origen (0, 0)

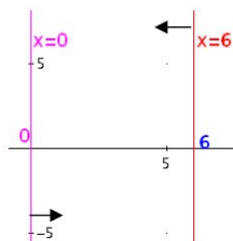
$$x + y \leq 10$$

$$(0, 0) \Rightarrow 0 + 0 \leq 10$$

$0 \leq 10$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

$$0 \leq x \leq 6$$

- Dibujamos la recta $x=0$ y $x=6$



$$x \geq y$$

- Dibujamos la recta $x = y$. Damos dos valores a la x

x	0	1
y	0	1

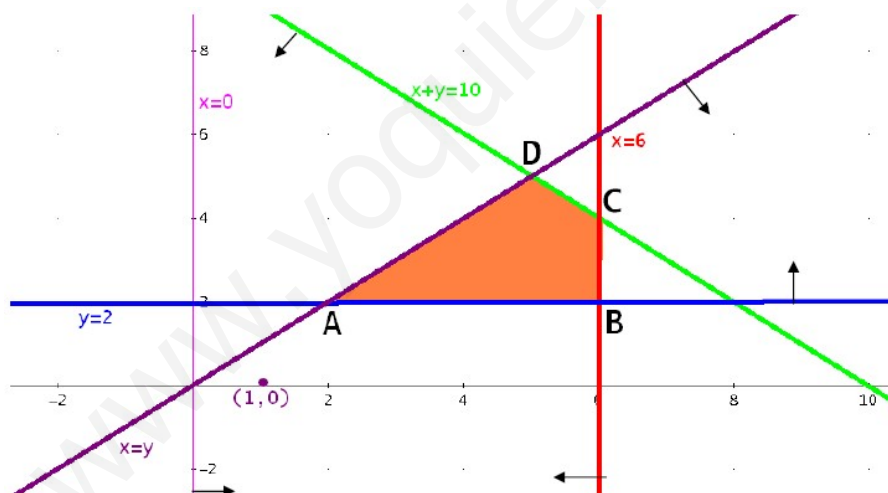
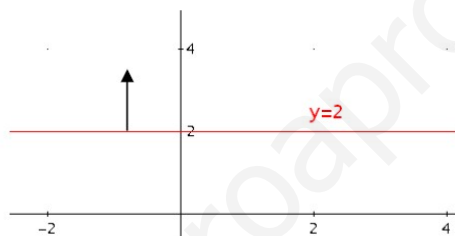
- Elegimos un punto que no pertenezca a la recta $x=y$, por ejemplo, $(1,0)$

$$x \geq y$$

$(1,0) \Rightarrow 1 \geq 0$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el punto $(1,0)$

$$y \geq 2$$

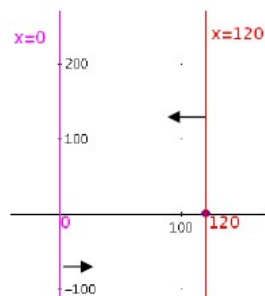
- Dibujamos la recta $y=2$



b)

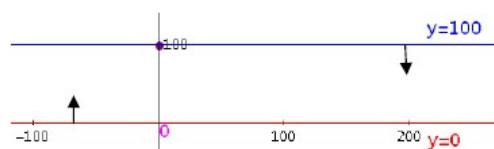
$$0 \leq x \leq 120$$

- Dibujamos la recta $x=0$ y $x=120$



$$0 \leq y \leq 100$$

- Dibujamos la recta $y=0$ e $y=100$



$$x + y \leq 150$$

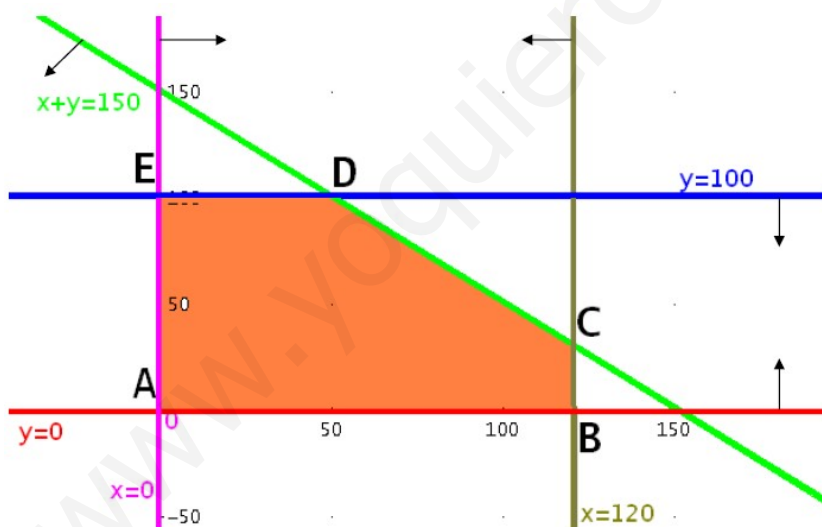
- Dibujamos la recta $x + y = 150$. Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen $(0, 0)$

x	0	150
y	150	0

$$x + y \leq 150$$

$$(0, 0) \Rightarrow 0 + 0 \leq 150$$

$0 \leq 150$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen



c)

$$y - x \leq 2$$

- Dibujamos la recta $y - x = 2$. Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen $(0, 0)$

x	0	-2
y	2	0

$$y - x \leq 2$$

$$(0, 0) \Rightarrow 0 - 0 \leq 2$$

$0 \leq 2$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

$$x+5y \geq 10$$

□ Dibujamos la recta $x+5y=10$. Damos dos valores a la x

□ Elegimos el origen $(0, 0)$

$$x+5y \geq 10$$

$$(0,0) \Rightarrow 0+5 \cdot 0 \geq 10$$

$0 \geq 10$ No es Cierto, por tanto la solución es el semiplano donde no se encuentra el origen

x	0	10
y	2	0

$$x+2y \leq 16$$

□ Dibujamos la recta $x+2y=16$. Damos dos valores a la x

□ Elegimos el origen $(0, 0)$

$$x+2y \leq 16$$

$$(0,0) \Rightarrow 0+2 \cdot 0 \leq 16$$

$0 \leq 16$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

x	0	16
y	8	0

$$2x+y \leq 20$$

□ Dibujamos la recta $2x+y=20$. Damos dos valores a la x

□ Elegimos el origen $(0, 0)$

$$2x+y \leq 20$$

$$(0,0) \Rightarrow 2 \cdot 0+0 \leq 20$$

$0 \leq 20$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

x	0	10
y	20	0

