JUNIO

BLOQUE I. PREGUNTAS DE TEORÍA

T1 Energía potencial gravitatoria.
T2 Inducción electromagnética: leyes de Faraday y Lenz.
T3 Leyes de la reflexión y la refracción.
T4 Relatividad especial. Postulados y repercusiones.

Para contestar las preguntas teóricas solo tienes que consultar los apartados correspondientes en tu libro de texto.

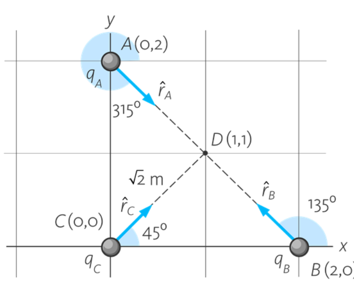
BLOQUE II. CUESTIONES

C1 Se sitúan 3 cargas puntuales q_A, q_B y q_C en los puntos $A(0,2,0)$, $B(2,0,0)$ y $C(0,0,0)$ respectivamente. Razonar cuánto debe valer q_B y q_C en función de q_A, para que el campo eléctrico se anule en el punto $D(1,1,0)$.

El campo eléctrico que crea una carga puntual q en punto del espacio viene dado por

$$E = \frac{Kq}{r^2}\hat{r}$$

Dado que la coordenada z de todos los puntos vale 0, todas las cargas están situadas en el plano xy. Vamos a representarlas y dibujar los vectores unitarios de posición. No podemos representar el campo creado por cada carga porque no conocemos sus signos.



Así, el campo creado por cada carga en el punto D viene dado por:

$$\vec{E}_A = \frac{Kq_A}{(\sqrt{2})^2}(\cos 315^{\circ}, \operatorname{sen} 315^{\circ}) = \frac{Kq_A}{2}\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}}$$

$$\vec{E}_B = \frac{Kq_B}{(\sqrt{2})^2}(\cos 135^{\circ}, \operatorname{sen} 135^{\circ}) = \frac{Kq_B}{2}\underbrace{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}}$$

$$\vec{E}_C = \frac{Kq_C}{(\sqrt{2})^2}(\cos 45^{\circ}, \operatorname{sen} 45^{\circ}) = \frac{Kq_C}{2}\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}}$$

Si el campo eléctrico debe valer cero en este punto, entonces

$$\vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C = 0$$

Para las componentes horizontales se tiene que cumplir:

$$\frac{\sqrt{2}Kq_A}{4} - \frac{\sqrt{2}Kq_B}{4} + \frac{\sqrt{2}Kq_C}{4} = 0 \longrightarrow q_B - q_C = q_A$$

Y para las componentes verticales

$$-\frac{\sqrt{2}Kq_A}{4} + \frac{\sqrt{2}Kq_B}{4} + \frac{\sqrt{2}Kq_C}{4} = 0 \longrightarrow q_B + q_C = q_A$$

Resolviendo el sistema por reducción se obtiene $q_B = q_A$ y $q_C = 0$.

C2 Por un cable de fibra óptica por el que nos llega la señal de internet a casa se propaga una onda electromagnética cuyo campo eléctrico viene dado por $E = E_0 \cos(10^4 x - 2\times 10^{15} t)$, con x dado en mm y t en segundos. Determinar el índice de refracción del material del cable.

El índice de refracción del material del cable viene dado por la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el cable:

$$n = \frac{c}{v}$$

Se trata de determinar la velocidad de la luz en el cable. Para ello, tendremos en cuenta que la expresión general del campo eléctrico asociado a una onda electromagnética es

$$E = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

De manera que comparando con la expresión que nos da el enunciado, tenemos

$$k = 10^4 \text{ mm}^{-1} \cdot \frac{1000 \text{ mm}}{1 \text{ m}} = 10^7 \text{ m}^{-1}$$

$$\omega = 2\times10^{15}\ \text{rad s}^{-1}$$

La velocidad de propagación depende del número de onda y de la frecuencia angular según:

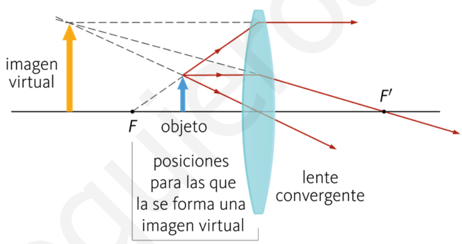
$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\times10^{15}}{10^{7}} = 2\times10^{8}\ \text{m s}^{-1}$$

Finalmente, el índice de refracción del material del cable es

$$n = \frac{3\times10^{8}}{2\times10^{8}} = 1.5$$

C3 Razonar gráficamente la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: "Las imágenes formadas por una lente convergente siempre son reales".

La afirmación es falsa, ya que para objetos situados entre el punto focal objeto de una lente convergente y la lente, la imagen obtenida es siempre virtual. Veámoslo mediante el siguiente trazado de rayos:



C4 La proporción de carbono-14 en la madera de un sarcófago egipcio es un 60% del que tenía originalmente. Sabiendo que el periodo de semidesintegración (o semiperiodo) del carbono-14 es 5730 años, determinar la edad del sarcófago.

La cantidad de ^{14}C presente en la madera del sarcófago ha disminuido con el tiempo según la ley exponencial

$$m = m_o e^{-\lambda t}$$

donde λ representa la constante de desintegración radiactiva del ^{14}C, relacionada con el período de semidesintegración según:

$$T_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda} \longrightarrow \lambda=\frac{\ln 2}{T_{1/2}}=\frac{\ln 2}{5730}=1.21\times 10^{-4} \text{ años}^{-1}$$

Si la masa actual de ^{14}C representa el 60% de la inicial, entonces:

$$0.6m_o=m_o e^{-1.21\times 10^{-4}\cdot t} \longrightarrow 0.6=e^{-1.21\times 10^{-4}\cdot t} \longrightarrow \ln 0.6=-1.21\times 10^{-4}\cdot t$$

$$t=\frac{\ln 0.6}{-1.21\times 10^{-4}}=4220 \text{ años}$$

La antigüedad del sarcófago se estima en unos 4220 años.

BLOQUE III. PROBLEMAS

P1 El pasado 21 de diciembre se produjo una conjunción entre Júpiter y Saturno, consistente en que desde la Tierra ambos planetas se veían juntos casi como un único punto. Ello es debido a que en ese momento la Tierra, Júpiter y Saturno estaban en una misma recta.
a) Determinar el periodo orbital de Júpiter en años.
b) Determinar la fuerza gravitatoria que Júpiter y Saturno ejercían sobre la Tierra ese día.
c) Si solo consideramos la influencia de Júpiter y Saturno, determinar la distancia respecto de Saturno sobre la recta que los une en que la fuerza gravitatoria es nula. (1 punto)
Datos: $G=6.67\times 10^{-11}$ Nm²kg⁻²; masa del Sol $=2\times 10^{30}$ kg;
masa de Júpiter $=1.90\times 10^{27}$ kg; masa de Saturno $=5.7\times 10^{26}$ kg;
masa de la Tierra $=6.0\times 10^{24}$ kg; distancia Tierra-Sol $=1.5\times 10^{8}$ km;
distancia Sol-júpiter $=7.8\times 10^{8}$ km; distancia Sol-Saturno 14.3×10^{8} km.

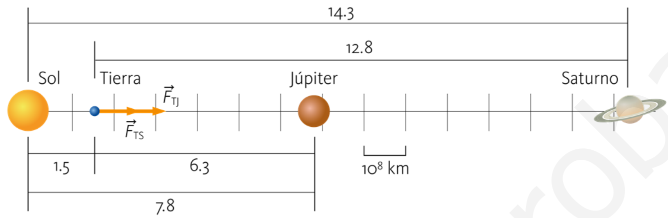
a) La tercera ley de Kepler permite relacionar los períodos orbitales de diferentes planetas con el semieje mayor de la órbita que describen alrededor del Sol. En el caso de órbitas circulares, el semieje mayor se sustituye por el radio de la órbita o distancia al Sol. Si comparamos la órbita terrestre con la órbita de Júpiter,

$$\left[\frac{T_J}{T_T}\right]^2=\left[\frac{d_{JS}}{d_{TS}}\right]^3$$

Sustituyendo los valores numéricos, se obtiene:

$$\left[\frac{T_J}{1}\right]^2 = \left[\frac{7.8\times10^8}{1.5\times10^8}\right]^3 \longrightarrow T_J^2 = 5.2^3 = 141 \longrightarrow T_J = 11.9 \text{ años}$$

b) Las fuerzas gravitatorias ejercidas por Júpiter y Saturno sobre la Tierra, son



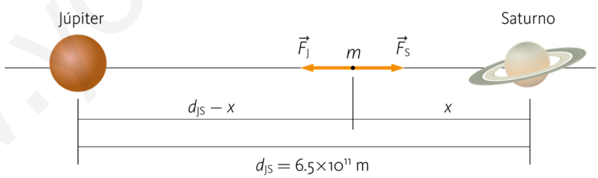
$$F_{TJ} = \frac{GM_JM_T}{d_{TJ}^2} = \frac{6.67\times10^{-11}\cdot1.90\times10^{27}\cdot6.0\times10^{24}}{(6.3\times10^{11})^2} = 1.92\times10^{18} \text{ N}$$

$$F_{TS} = \frac{GM_SM_T}{d_{TS}^2} = \frac{6.67\times10^{-11}\cdot5.7\times10^{26}\cdot6.0\times10^{24}}{(12.8\times10^{11})^2} = 1.39\times10^{17} \text{ N}$$

Y la fuerza resultante es la suma de estos dos valores

$$F_T = F_{TJ} + F_{TS} = 1.92\times10^{18} + 1.39\times10^{17} = 2.06\times10^{18} \text{ N}$$

c) Se trata de determinar el punto en el que una masa m sometida únicamente a la atracción gravitatoria de Júpiter y Saturno se encuentra en equilibrio. Es decir, las fuerzas ejercidas por ambos planetas tienen el mismo módulo y sentidos opuestos.



Se debe satisfacer la condición:

$$\frac{GM_Jm}{(d_{JS}-x)^2} = \frac{GM_Sm}{x^2} \longrightarrow \frac{M_J}{(d_{JS}-x)^2} = \frac{M_S}{x^2} \longrightarrow \frac{M_J}{M_S} = \frac{(d_{JS}-x)^2}{x^2}$$

$$\left[\frac{d_{JS}-x}{x}\right]^2 = \frac{M_J}{M_S} \longrightarrow \frac{d_{JS}-x}{x} = \pm\sqrt{\frac{M_J}{M_S}}$$

Ahora vamos a despejar x, sacando factor común

$$d_{\mathrm{JS}}-x=\pm x\sqrt{\frac{M_{\mathrm{J}}}{M_{\mathrm{S}}}} \quad\longrightarrow\quad d_{\mathrm{JS}}=x\pm x\sqrt{\frac{M_{\mathrm{J}}}{M_{\mathrm{S}}}}=x\left[1\pm\sqrt{\frac{M_{\mathrm{J}}}{M_{\mathrm{S}}}}\right]$$

Finalmente, se obtienen dos soluciones:

$$x=\frac{d_{\mathrm{JS}}}{1\pm\sqrt{M_{\mathrm{J}}/M_{\mathrm{S}}}}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{6.5\times10^{11}}{1+\sqrt{19.0/5.7}}=2.3\times10^{11}\text{ m}\\[2ex]\dfrac{6.5\times10^{11}}{1-\sqrt{19.7/5.7}}=-7.87\times10^{11}\text{ m}\end{array}\right.$$

La solución que buscamos es la positiva. La negativa corresponde a un punto situado más allá de Saturno. En dicho punto las fuerzas tienen el mismo módulo, pero los vectores tienen el mismo sentido y no se anulan.

P2 Una manera de determinar la masa del virus SARS-CoV-2, causante de la enfermedad Covid-19, es mediante un espectrómetro de masas.

a) Primero un haz de electrones de 70 eV de energía cinética cada uno impacta contra una “nube” de virus arrancando un electrón de cada virus. Determinar la cantidad de movimiento y la longitud de onda de un electrón del haz antes del impacto.

b) Posteriormente los virus ionizados, inicialmente en reposo, se aceleran mediante una diferencia de potencial, ΔV. Obtener la expresión de la velocidad que adquieren en función de ΔV, la carga del virus ionizado, q, y su masa, m.

c) Finalmente se aplica un campo magnético de 2.4 T perpendicular a la velocidad del virus y se determina que el radio descrito por estos es de 1473 m. Obtener la masa del virus SARS-CoV-2 sabiendo que el valor de ΔV, descrito en el apartado anterior, es 1000 V. (1 punto)

Datos: $1\text{ eV}=1.6\times10^{-19}$ J; carga del electrón $=1.6\times10^{-19}$ C;
$h=6.63\times10^{-34}$ J; masa del electrón $=9.1\times10^{-31}$ kg.

a) La energía cinética y la cantidad de movimiento de una partícula están relacionadas según:

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2 \quad\longrightarrow\quad mE_c=\frac{1}{2}\underbrace{m^2v^2}_{p^2} \quad\longrightarrow\quad p=\sqrt{2mE_c}$$

La energía cinética del electrón expresada en julios es

$$E_c = 70 \text{ eV} \cdot \frac{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 1.12 \times 10^{-17} \text{ J}$$

Y el momento del electrón

$$p = \sqrt{2 \cdot 9.1 \times 10^{-11} \cdot 1.12 \times 10^{-17}} = 4.51 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}$$

La longitud de onda asociada a una partícula cuyo momento lineal o cantidad de movimiento es p viene dada por

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

En este caso,

$$\lambda = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4.51 \times 10^{-24}} = 1.47 \times 10^{-10} \text{ m}$$

b) Considera una partícula de masa m y carga positiva q acelerada desde el reposo entre dos puntos A y B a través de una diferencia de potencial ΔV .

Dado que el campo eléctrico es conservativo, la energía mecánica de la partícula debe conservarse. Partiendo del reposo, la variación de la energía cinética entre estos dos puntos es

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2 - 0 = \frac{1}{2} m v^2$$

Por otro lado, la variación de la energía potencial del virus es

$$\Delta E_p = q V_B - q V_A = q(V_B - V_A)$$

De manera que

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \longrightarrow \frac{1}{2} m v^2 + q(V_B - V_A) = 0 \longrightarrow \frac{1}{2} m v^2 = q \underbrace{(V_A - V_B)}_{\Delta V}$$

Finalmente, se obtiene

$$v = \sqrt{\frac{2 q \Delta V}{m}}$$

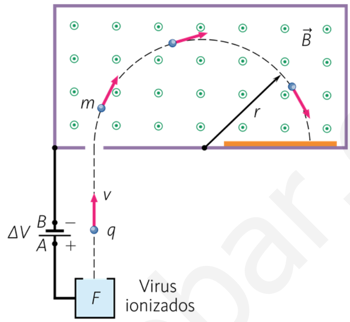
c) Al aplicar un campo magnético aparece sobre el virus en movimiento una fuerza debida al campo que viene dada por la ley de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

El módulo de dicha fuerza, en el caso en el que el campo es perpendicular a la velocidad es

$$F = qvB$$

y su dirección es perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{B}$ y $\vec{v}$. Por ser perpendicular a la velocidad, la aceleración que aparece sobre el virus solo tiene componente normal, de manera que la segunda ley de Newton se expresa como:



$$qvB = m\frac{v^2}{r} \longrightarrow qB = m\frac{v}{r} \longrightarrow v = \frac{qBr}{m}$$

Igualando ambas expresiones para la velocidad, se obtiene

$$\frac{qBr}{m} = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} \longrightarrow \frac{q^2B^2r^2}{m^2} = \frac{2q\Delta V}{m} \longrightarrow m = \frac{qB^2r^2}{2\Delta V}$$

Finalmente, sustituimos los valores numéricos, y se obtiene:

$$m = \frac{1.6\times10^{-19}\cdot 2.4^2\cdot 1473^2}{2\cdot 1000} = 10^{-15}\ \text{kg}$$

P3 Un tenor es un cantante de ópera que puede cantar emitiendo sonido de entre 120 y 520 Hz, mientras que una soprano puede emitir entre 260 y 1300 Hz.

a) Razonar quién puede emitir una menor longitud de onda y dar su valor.

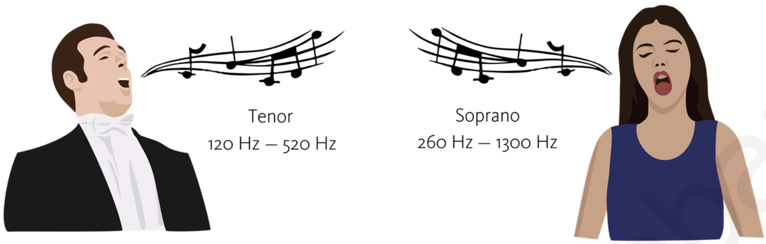
b) Si, cuando cantan individualmente, un tenor se oye a 1 m de distancia con una sonoridad (o nivel de intensidad acústica) de 102 dB y la soprano 98 dB, calcular la potencia acústica que emite cada cantante.

c) Calcular a qué distancia una persona normal dejará de escuchar a los dos cantantes cuando cantan a la vez, (suponiendo que no hay pérdida de intensidad por absorción en el aire).

Dato: $I_0 = 10^{-12}\ \text{W m}^{-2}$ (intensidad mínima que puede detectar una persona normal).

a) La longitud de onda y la frecuencia de una onda están relacionadas con la velocidad de propagación según:

$$v = \lambda f \longrightarrow \lambda = \frac{v}{f}$$



Teniendo en cuenta que la velocidad de propagación del sonido es 340 m s^{-1} entonces la longitud de onda menor corresponde a la mayor frecuencia. Es decir, la soprano. Y el valor numérico de esta frecuencia será

$$\lambda = \frac{340}{1300} = 0.262 \text{ m}$$

b) La intensidad de una onda a una distancia r de la fuente viene dada por

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \longrightarrow P = 4\pi r^2 I$$

Así que para determinar la potencia necesitamos conocer la intensidad de la onda. Dicha intensidad está relacionada con el nivel de intensidad según:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \longrightarrow I = I_0 10^{\frac{\beta}{10}}$$

Para el tenor,

$$I = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{102}{10}} = 0.0158 \text{ W m}^{-2}$$

$$P = 4\pi \cdot 1^2 \cdot 0.0158 = 0.199 \text{ W}$$

Y para la soprano,

$$I = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{98}{10}} = 0.00631 \text{ W m}^{-2}$$

$$P = 4\pi \cdot 1^2 \cdot 0.00631 = 0.0793 \text{ W}$$

c) Al cantar a la vez, la potencia emitida será la suma de ambas potencias

$$P = 0.199 + 0.0793 = 0.278 \text{ W}$$

Esta onda dejará de ser audible cuando su intensidad tome un valor igual al umbral de audición $I = I_0$. Sustituyendo los valores numéricos, se obtiene

$$10^{-12}=\frac{0.278}{4\pi r^2}\longrightarrow r=\sqrt{\frac{0.278}{4\pi\cdot 1\times 10^{-12}}}=149000\text{ m}$$

P4 En la tabla se muestra, en electronvoltios, el trabajo de extracción, W_o (o función de trabajo) para el efecto fotoeléctrico de distintos metales. Considérese una lámpara led que emite luz de 283 nm que incide sobre una lámina de aluminio arrancando electrones.

metal	W_o (eV)
cesio	2.1
aluminio	4.1
oro	5.1
platino	6.4

a) Calcular la frecuencia de la luz emitida por el led.
b) Calcular la velocidad de los electrones arrancados.
c) Razonar para qué metales de la tabla no se emitirán electrones si incide luz de la lámpara led.

Datos: $h=6.63\times 10^{-34}$ J; $1\text{ eV}=1.6\times 10^{-19}$ J;

masa del electrón $=9.1\times 10^{-31}$ kg.

a) La frecuencia de la luz está relacionada con la longitud de onda según

$$c=\lambda f\longrightarrow f=\frac{c}{\lambda}$$

Sustituyendo los valores numéricos se obtiene

$$f=\frac{3\times 10^{8}}{2.83\times 10^{-7}}=1.06\times 10^{15}\text{ Hz}$$

b) La velocidad de los electrones emitidos depende de la frecuencia de la radiación incidente según la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico

$$hf=W_o+\frac{1}{2}m_e v_{max}^2$$

Ahora bien, para poder obtener dicha velocidad debemos expresar en unidades del SI el trabajo de extracción del aluminio.

$$W_o=4.1\text{ eV}\cdot\frac{1.6\times 10^{-19}\text{ J}}{1\text{ eV}}=6.56\times 10^{-19}\text{ J}$$

Ahora ya solo hace falta sustituir

$$6.63\times 10^{-34}\cdot 1.06\times 10^{15}=6.56\times 10^{-19}+\frac{1}{2}\cdot 9.1\times 10^{-31}\cdot v_{max}^2$$

$$7.03\times 10^{-19}=6.56\times 10^{-19}+\frac{1}{2}\cdot 9.1\times 10^{-31}\cdot v_{max}^2$$

$$v_{max} = 3.21 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$$

c) La emisión de electrones por un metal tiene lugar siempre que la energía de la radiación incidente sea mayor que el trabajo de extracción del metal. En nuestro caso, la energía de la radiación incidente es $hf = 7.03 \times 10^{-19}$ J que expresada en electronvoltios es

$$7.03 \times 10^{-19} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}} = 4.39 \text{ eV}$$

Esta energía es inferior al trabajo de extracción del oro y del platino. Por lo tanto, estos dos metales no emitirán electrones al incidir luz de la lampara led.