JUNIO

1. Una muestra de $^{60}_{27}\text{Co}$ posee una actividad de 1.251×10^{11} Bq.
a) Completa la ecuación de desintegración indicando de que tipo se trata.

$$^{60}_{27}\text{Co} \rightarrow \_\_ + \overline{\nu} + {}^{60}_{28}\text{Ni}$$

Pasados 10 años su actividad es 3.36×10^{10} Bq.
b) Halla el período de semidesintegración.
c) ¿Cuál es el número de núcleos que había inicialmente?

a) La ecuación consiste en la transformación de un neutrón en un protón. Fíjate que el cobalto tiene 27 protones y el níquel tiene 28, manteniendo ambos el mismo número de nucleones. Este proceso se conoce en física con el nombre de desintegración β^- y en él, se emite además de un antineutrino, $\overline{\nu}$, un electrón. De manera que la ecuación completa se escribe de la siguiente manera:

$$^{60}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^{60}_{28}\text{Ni} + {}^{0}_{-1}e + \overline{\nu}$$

b) El período de semidesintegración se obtiene a la partir de la constante de desintegración radiactiva

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Y la constante de desintegración radiactiva la obtendremos aplicando la variación de la actividad con el tiempo:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}$$

Sustituyendo los valores numéricos se obtiene

$$3.36\times10^{10} = 1.251\times10^{11} e^{-10\lambda} \longrightarrow e^{-10\lambda} = 0.269 \longrightarrow -10\lambda = \ln 0.269$$

$$\lambda = \frac{\ln 0.269}{-10} = 0.131 \text{ años}^{-1}$$

Finalmente,

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{0.131} = 5.29 \text{ años}$$

c) El número de núcleos radiactivos N presentes en una muestra está relacionado con la actividad A de dicha muestra y la constante de desintegración radiactiva λ según:

$$A=\lambda N \quad \xrightarrow{\text{despejamos } N} \quad N=\frac{A}{\lambda}$$

Sustituimos los valores numéricos, expresando previamente la constante de desintegración radiactiva en el SI:

$$\lambda=0.131 \text{ años}^{-1}\cdot\frac{1 \text{ año}}{365 \text{ días}}\cdot\frac{1 \text{ día}}{86400 \text{ s}}=4.15\times10^{-9} \text{ s}^{-1}$$

$$N=\frac{1.251\times10^{11}}{4.15\times10^{-9}}=3.01\times10^{19} \text{ núcleos}$$

2. Sabemos que una lente convergente de focal 4 cm provoca una imagen amplificada 8 veces de un objeto.
a) Obtener las dos posiciones en las que puede estar el objeto.
b) Indica como serán las imágenes en ambos casos (real-virtual, derecha-invertida).
c) Hacer los diagramas del trazado de rayos en ambos casos.

Para resolver el problema se usará el convenio de signos DIN.

a) Las dos posiciones que buscamos corresponden a aumentos transversales iguales a $+8$ y a -8.
a.1) Considerando en primer lugar $M_T=+8$, se satisface

$$M_T=\frac{s'}{s}=8 \quad \longrightarrow \quad s'=8s$$

Por otro lado, las distancias objeto e imagen están relacionadas con la distancia focal imagen de la lente según

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}$$

Sustituyendo $f'=4$ cm y $s'=8s$, entonces

$$\frac{1}{8s}-\frac{1}{s}=\frac{1}{4} \quad \longrightarrow \quad \frac{-7}{8s}=\frac{1}{4} \quad \longrightarrow \quad s=-3.5 \text{ cm}$$

y

$$s'=8s=8\cdot(-3.5)=-28 \text{ cm}$$

a.2) Considerando en primer lugar $M_T = -8$, se satisface

$$M_T = \frac{s'}{s} = -8 \longrightarrow s' = -8s$$

Por otro lado, las distancias objeto e imagen están relacionadas con la distancia focal imagen de la lente según

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

Sustituyendo $f' = 4$ cm y $s' = -8s$, entonces

$$\frac{1}{-8s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{-9}{8s} = \frac{1}{4} \longrightarrow s = -4.5 \text{ cm}$$

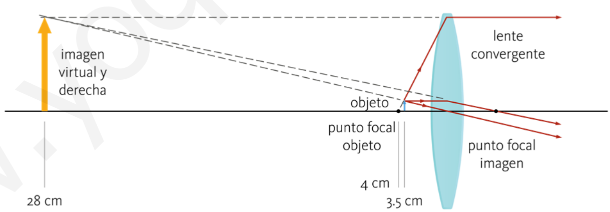
y

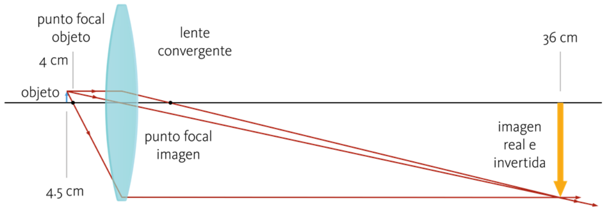
$$s' = -8s = -8 \cdot (-4.5) = 36 \text{ cm}$$

De manera que las distancias a las que podemos situar el objeto de la lente son a 3.5 cm y a 4.5 cm por delante de la lente.

b) Teniendo en cuenta que en el primer caso $s' < 0$ se trata de una imagen virtual y derecha puesto que el aumento es positivo. En el segundo caso, tenemos $s' > 0$ de manera que se trata de una imagen real e invertida pues el aumento es negativo.

c) Los diagramas de rayos correspondientes son los siguientes:





3.
(A) Deducción de la velocidad y la energía en una órbita circular.
(B) Un satélite de 500 kg orbita en una órbita circular alrededor de un planeta con un período de 20 h y a una distancia de su centro de 3.75×10^{7} m.
a) Hallar el valor de la constante de gravitación universal *G*.
b) ¿Cuál es el valor de la fuerza a la que se ve sometido el satélite?
c) Hallar la energía mecánica del satélite.
Datos: $M_{\text{Planeta}} = 6\times10^{24}$ kg.

(A) Consideremos un cuerpo de masa m que describe una órbita circular de radio r alrededor de otro cuerpo de masa M. A partir de la 2ª ley de Newton, teniendo en cuenta que la fuerza que actúa sobre m viene dada por la ley de gravitación universal, se tiene:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \longrightarrow \frac{GM}{r} = v^2 \longrightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Esta expresión corresponde a la velocidad orbital. La energía cinética asociada a la masa m es

$$E_c = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\left[\sqrt{\frac{GM}{r}}\right]^2 = \tfrac{1}{2}m\cdot\frac{GM}{r} = \frac{GMm}{2r}$$

La energía potencial de m en órbita es

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

De manera que su energía mecánica, será la suma de estas dos energías y se escribe como

$$E = E_c + E_p = \frac{GMm}{2r} + \left[-\frac{GMm}{r}\right] = \frac{GMm}{2r} - \frac{2GMm}{2r} = -\frac{GMm}{2r}$$

(B)
a) Vamos a obtener la relación entre el período orbital del satélite y el radio de la órbita que describe a partir de la 2ª ley de Newton, teniendo en cuenta que la fuerza que actúa sobre el satélite viene dada por la ley de gravitación universal:

$$\frac{GM_{\text{Planeta}}m}{r^2}=m\frac{v^2}{r} \longrightarrow \frac{GM_{\text{Planeta}}}{r}=v^2$$

Por otro lado, la velocidad orbital está relacionada con el período según:

$$v=\frac{2\pi r}{T}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior, se obtiene

$$\frac{GM_{\text{Planeta}}}{r}=\left[\frac{2\pi r}{T}\right]^2 \longrightarrow \frac{GM_{\text{Planeta}}}{r}=\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \longrightarrow G=\frac{4\pi^2 r^3}{M_{\text{Planeta}}T^2}$$

Finalmente,

$$G=\frac{4\pi^2(3.75\times 10^7)^3}{6\times 10^{24}\cdot(20\cdot\underbrace{3600}_{\text{1 h en s}})^2}=6.69\times 10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$$

b) La fuerza a la que está sometido el satélite es

$$F=\frac{GM_{\text{Planeta}}m}{r^2}=\frac{6.69\times 10^{-11}\cdot 6\times 10^{24}\cdot 500}{(3.75\times 10^7)^2}=143\ \text{N}$$

c) La energía mecánica del satélite viene dada por:

$$E=-\frac{GM_{\text{Planeta}}m}{2r}=-\frac{6.69\times 10^{-11}\cdot 6\times 10^{24}\cdot 500}{2\cdot 3.75\times 10^7}=-2.68\times 10^9\ \text{J}$$

4. Campo magnético. Fuerza magnética sobre una carga en movimiento. Fuerza de Lorentz. Vector campo $\vec{B}$.

Se trata de una pregunta de carácter teórico. Consulta tu libro de texto.

5. Supongamos una carga q fija en el origen de coordenadas. Se lanza desde el infinito con una velocidad de 3000 m s^{-1} una partícula de carga negativa q' ($q' = -1.6\times10^{-19}$ C) y masa 1.6×10^{-27} kg , que se mueve horizontalmente (eje X), hacia la carga q. La partícula se para a una distancia de 3 m de la carga q. Despreciamos cualquier efecto gravitatorio.
a) Hallar el valor de la carga q.
b) Hallar el valor del campo electrostático que crean las dos cargas (una vez que están en reposo) en el punto medio de ambas.
Datos: $K = 9\times10^{9} \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$.

a) La carga q' se mueve bajo la acción del campo eléctrico creado por la carga q. Este campo es conservativo; es decir, la energía mecánica de q' se va a mantener constante. Vamos a aplicar entonces el principio de conservación de la energía mecánica. La energía cinética en el infinito es

$$E_{c,i} = \tfrac{1}{2}mv_i^2 = \tfrac{1}{2}\cdot1.6\times10^{-27}\cdot3000^2 = 7.2\times10^{-21} \text{ J}$$

La energía potencial eléctrica de q' en el infinito vale 0, porque el potencial creado por q en dicho punto es nulo.

$$E_{p,i} = q'V = 0$$

Por otro lado, al llegar a 3 m de la carga q la carga q' se detiene y, por tanto, su energía cinética vale 0.

$$E_{c,f} = 0$$

En este punto, la energía potencial eléctrica de q' vale:

$$E_{p,f} = q'V = q'\underbrace{\left[\frac{Kq}{r}\right]}_{\substack{\text{potencial}\\ \text{creado}\\ \text{por } q}} = -1.6\times10^{-19}\cdot\frac{9\times10^{9}\cdot q}{3} = -4.8\times10^{-10}q$$

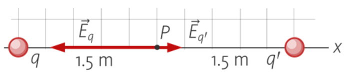
Finalmente, igualando las energías mecánicas, se obtiene

$$7.2\times10^{-21} + 0 = 0 + (-4.8\times10^{-10}q) \longrightarrow q = \frac{7.2\times10^{-21}}{-4.8\times10^{-10}} = -1.5\times10^{-11} \text{ C}$$

b) Por otro lado, el campo eléctrico creado por una carga puntual en un punto del espacio viene dado por

$$\vec{E}=\frac{Kq}{r^2}\hat{r}=\frac{Kq}{r^3}\vec{r}$$

Se recomienda usar la 1ª en el caso de conocer las direcciones y sentidos de todos los vectores implicados, mientras que sería recomendable usar la 2ª en el caso de no conocer dirección y sentido de alguno de los vectores.
Vamos a representar los vectores campo eléctrico creado por cada carga en el origen y los vectores de posición. El campo en un punto representa la fuerza que actúa sobre una carga positiva situada en dicho punto y los vectores unitarios se dibujan desde la carga que crea el campo hasta el punto.



Sustituyendo los valores numéricos se obtiene:

$$\vec{E}_q=\frac{Kq}{r_q^2}\hat{r}_q=\frac{9\times10^9\cdot(-1.5\times10^{-11})}{1.5^2}\underbrace{(1,0)}_{\vec{i}}=\underbrace{(-0.06,0)}_{-0.06\vec{i}}\ \text{N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_{q'}=\frac{Kq}{r_{q'}^2}\hat{r}_{q'}=\frac{9\times10^9\cdot(-1.6\times10^{-19})}{1.5^2}\underbrace{(-1,0)}_{-\vec{i}}=\underbrace{(6.4\times10^{-10},0)}_{6.4\times10^{-10}\vec{i}}\ \text{N C}^{-1}$$

Y el campo total $\vec{E}\approx\underbrace{(-0.06,0)}_{-0.06\vec{i}}$ N C^{-1} cuyo módulo es $E=0.06$ N C^{-1}.

6. Una onda transversal sinusoidal de 10 cm de amplitud y longitud de onda 200 cm se propaga en sentido positivo del eje X con una velocidad de 100 cm s^{-1}. Tomamos como origen la posición $x=0$. En el instante inicial el origen tiene una elongación $y=0$ y su velocidad es negativa. Hallar:

a) ecuación de onda.
b) máxima velocidad de vibración de cualquier partícula de la cuerda.
c) velocidad y elongación de una partícula situada a 150 cm a la derecha del origen en $t=3.25$ s.

a) La ecuación general de una onda se puede escribir de muchas maneras. Por ejemplo,

$$y(x,t)=A\text{sen}(\omega t-kx+\Phi_0)$$

donde A es la amplitud, k el número de onda y ω la frecuencia angular. El número de onda está relacionado con la longitud de onda según:

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{2}=\pi\ \text{m}^{-1}$$

Por otro lado, la frecuencia angular está relacionada con el número de onda y la velocidad de propagación según:

$$v=\frac{\omega}{k}\ \longrightarrow\ \omega=vk=1\cdot\pi=\pi\ \text{rad s}^{-1}$$

Para determinar la fase inicial tendremos en cuenta que:

$$y(x=0,t=0)=0$$

Sustituyendo en la ecuación de onda, da lugar a la ecuación

$$0=0.1\,\text{sen}\,(\Phi_0)\ \longrightarrow\ \text{sen}\,\Phi_0=0\ \longrightarrow\ \Phi_0=\left\langle\begin{matrix}0\ \text{rad}\\ \pi\ \text{rad}\end{matrix}\right.$$

Recuerda la calculadora solo da una solución (en este caso 0 rad) y tú debes buscar si hay otras y escribirlas. En este caso, π radianes sería solución, al igual que cualquier otro múltiplo de π rad. Para decidir el valor de la fase inicial que debemos escoger, calculamos la velocidad transversal o de oscilación, del punto $x=0$,

$$y(0,t)=0.1\,\text{sen}\,(\pi t+\Phi_0)\ \text{m}$$

$$v_y(0,t)=\tfrac{dy}{dt}=0.1\pi\cos(\pi t+\Phi_0)\ \text{m s}^{-1}$$

La velocidad del origen en el instante $t=0$, será

$$v_y(0,0)=0.1\pi\cos(\Phi_0)$$

Para que esta velocidad sea negativa el coseno debe ser negativo. Por lo tanto Φ_0 debe ser π rad. Finalmente, la ecuación de onda que buscamos es:

$$y(x,t)=0.1\,\text{sen}\,(\pi t-\pi x-\pi)$$

donde y se expresa en metros cuando x se expresa en metros y t en segundos.

b) La velocidad máxima de vibración de un punto cualquiera de la cuerda por la que se propaga la onda viene dada por la expresión:

$$\left|v_{y,\text{max}}\right|=A\omega$$

Sustituyendo los valores numéricos, se obtiene

$$\left|v_{y,\text{max}}\right|=0.1\cdot\pi=0.314\ \text{m s}^{-1}$$

c) La elongación de una partícula situada a 150 cm del origen en el instante $t=3.25$ s viene dada por

$$y(1.5,3.25) = 0.1\,\text{sen}\left[3.25\pi - 1.5\pi - \pi)\right] = 0.1\,\text{sen}(\tfrac{3\pi}{4}) = 0.1 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} = 0.0707 \text{ m}$$

La velocidad de esta partícula en función del tiempo es:

$$y(1.5,t) = 0.1\,\text{sen}\,(\pi t - 1.5\pi - \pi) \text{ m}$$

$$v_y(1.5,t) = \tfrac{dy}{dt} = 0.1\,\pi\cos(\pi t - 1.5\pi - \pi) \text{ m s}^{-1}$$

La velocidad correspondiente a $t = 3.25$ s será

$$v_y(1.5,3.25) = 0.1\,\pi\cos(3.25\pi - 1.5\pi - \pi) = 0.1\,\pi\cos\left[\tfrac{3\pi}{4}\right]$$

$$= 0.1\,\pi\tfrac{\sqrt{2}}{2} = 0.222 \text{ m s}^{-1}$$

Recuerda que la calculadora debe estar en modo radianes a la hora calcular la elongación, velocidad o aceleración de un punto cualquiera.

7.

(A) El sonido. Intensidad sonora y nivel de intensidad sonora. Definición y unidades.

(B) Una fuente puntual emite un sonido que se percibe con un nivel de intensidad sonora de 60 dB a una distancia de 20 m.

a) Hallar la intensidad sonora.

b) Hallar la potencia sonora de la fuente.

c) ¿A qué distancia deja de ser audible el sonido?

Dato: $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.

(A) *Se trata de una pregunta de carácter teórico. Consulta tu libro de texto.*

(B)

a) La intensidad de una onda sonora, I, está relacionada con el nivel de intensidad sonora, β, según esta otra expresión:

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0} \xrightarrow{\text{despejamos } I} I = I_0 10^{\frac{\beta}{10}}$$

De manera que la intensidad correspondiente a un nivel de intensidad sonora de 60 dB es

$$I = 10^{-12} \cdot 10^{6} = 10^{-6} \text{ W m}^{-2}$$

b) La intensidad de una onda sonora, I, está relacionada con la potencia de con la que emite el foco, P, según la expresión:

$$I=\frac{P}{4\pi r^2}\xrightarrow{\text{despejamos } P}P=4\pi r^2 I$$

Sustituyendo los valores numéricos, se obtiene:

$$P=4\pi\cdot 20^2\cdot 10^{-6}=5.03\times 10^{-3}\ \mathrm{W}$$

c) El sonido dejará de ser audible cuando su intensidad sea igual a la intensidad umbral, $I=I_0$. Haciendo uso de la potencia de la fuente,

$$I=\frac{P}{4\pi r^2}\xrightarrow{\text{depejamos}}r=\sqrt{\frac{P}{4\pi I}}=\sqrt{\frac{5.03\times 10^{-3}}{4\pi\cdot 10^{-12}}}=2\times 10^4\ \mathrm{m}=20\ \mathrm{km}$$

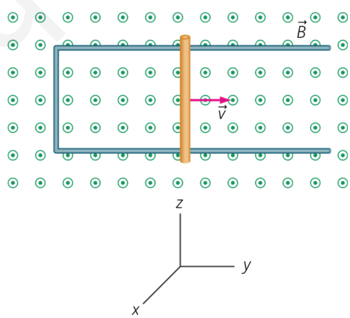
8.

(A) Enunciar la fuerza magnética sobre una corriente. Explicar cada uno de sus términos. Dibujo.

(B) El circuito de la figura esta formado por una barra metálica que puede deslizarse sobre un conductor en forma de U. Sobre dicho circuito actúa un campo magnético de 0.25 T perpendicular al plano del circuito y cuyo sentido es hacia fuera “del papel” (eje X positivo). La barra tiene una longitud de 0.2 m y una resistencia de $20\ \Omega$. Cuando la barra se mueve con una velocidad de $3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, tal y como se indica en la figura:

a) Hallar el valor y el sentido de la corriente inducida en el circuito.

b) Hallar la fuerza magnética que actúa sobre la barra.



(A) *Se trata de una pregunta de carácter teórico. Consulta tu libro de texto.*

(B)

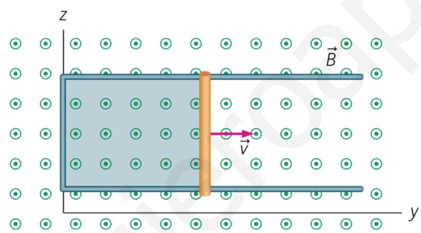
a) La ley de Faraday establece que la fuerza electromotriz inducida en un circuito es igual a la variación temporal del flujo magnético sobre el circuito y se expresa matemáticamente como

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

donde el flujo de campo magnético que atraviesa un circuito, Φ, es igual al producto escalar de los vectores campo y superficie:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS\cos\alpha$$

El vector superficie es un vector cuyo módulo es igual al área del circuito y su dirección y sentido es perpendicular a este. En nuestro caso, $\vec{S}$ tiene la dirección del eje X positivo.



La barra forma con el conductor en forma de U un rectángulo cuya altura es igual a la longitud de la barra, y cuya base, x, varía con el tiempo según la ecuación del movimiento rectilíneo y uniforme que describe la barra:

$$S = \underbrace{L \cdot x}_{\text{área}}, \text{ donde } x = x_0 + v_{0x} t$$

Tomando $x_0 = 0$, sustituimos B y S en la expresión del flujo y obtenemos:

$$\Phi = BLv_{0x} t \cos 0^\circ = BLv_{0x} t$$

Aplicando la ley de Faraday, la derivada del flujo respecto al tiempo da lugar a la expresión:

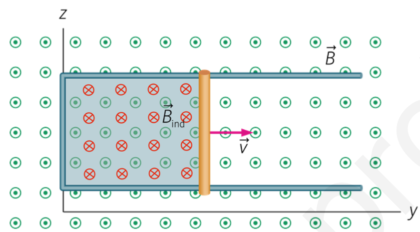
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -BLv_{0x}$$

Finalmente, sustituimos los valores numéricos, y obtenemos

$$\varepsilon = -0.25 \cdot 0.2 \cdot 3 = -0.15 \text{ V}$$

Para determinar el sentido de la corriente inducida aplicaremos la ley de Lenz.

Dicha ley establece que:
"*la fuerza electromotriz inducida tiene sentido opuesto a la variación que la ha producido.*"
Dado que el flujo que atraviesa el circuito "saliendo del papel" aumenta, hay una oposición a ese aumento de manera que el campo magnético inducido creado por la corriente inducida genera un flujo "entrando al papel".



Según la regla de la mano derecha, un campo entrante (dedo pulgar) es debido a una corriente en sentido horario. Así pues, la corriente inducida gira en sentido horario.

b) La fuerza magnética que actúa sobre la barra viene dada por:

$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$$

donde $\vec{L}$ representa un vector cuyo módulo es igual a la longitud de la barra y su sentido es el de la intensidad, *i*, que circula por la barra. En nuestro caso, la corriente tiene el sentido negativo del eje *z*. Por otro lado, la corriente que circula por la barra, la obtenemos aplicando la ley de Ohm,

$$i = \frac{-\varepsilon}{R} = \frac{0.15}{20} = 0.0075 \text{ A}$$

Finalmente,

$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B} = 0.0075 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -0.2 \\ 0.25 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3.75 \times 10^{-4} \vec{j} \text{ N}$$

Es decir, la fuerza actúa en el sentido negativo del eje *y*.