

Nombre y apellidos: _____

1. Se desea situar un satélite artificial de navegación de la serie GALILEO, con una masa de **700 kg**, en una **órbita circular intermedia** (MEO) a una **altura de 16000 km sobre la superficie terrestre**.

Datos: $R_T = 6370 \text{ km}$, $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$ Calcula:



- a) La **velocidad orbital** a esa altura. (**Justifica** la fórmula) (1 pt.) $4,2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
b) El **período** de la órbita en segundos y en horas. $33510 \text{ s} \approx 9,31 \text{ h}$ (0,5 pt.)
c) La **energía necesaria** de **satelización**. (**Justifica** la fórmula) (1,5 pt.) $3,75 \cdot 10^{10} \text{ J}$
d) La **velocidad de escape desde esa órbita**. $5,96 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ (1 pt.)

2. Tenemos una **masa de 5 kg** situada en el punto $A(-3,0)$ y otra **masa de 10 kg** situada en $B(3,0)$. Las distancias están medidas en metros. Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$

- a) Calcula el **vector campo gravitatorio** en el punto $C(0,4)$. $8 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 3,2 \cdot 10^{-11} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ (1,5 pt.)
b) Calcula el **vector campo gravitatorio** en el punto $D(0,0)$. $3,71 \cdot 10^{-11} \vec{i} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ (0,5 pt.)
c) Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** una masa de **2 kg** desde el punto $C(0,4)$ hasta el punto $D(0,0)$. **Interpreta** el **signo del trabajo**. $2,67 \cdot 10^{-10} \text{ J}$ (1 pt.)

3. Marte tiene dos satélites, llamados Fobos y Deimos, cuyas **órbitas** tienen **radios de 9400 y 23000 km**, respectivamente. Fobos tarda **7,7 h** en dar una vuelta alrededor del planeta. Halla el **período** de Deimos en horas. $29,5 \text{ h}$ (1 pt.)

4. CUESTIÓN: Señala cuál de las siguientes afirmaciones acerca de la **conservación del momento angular** de una partícula es **falsa** (**Justifica** la respuesta): (1 pt.)

- a) Si el momento angular se conserva, el **movimiento** es **plano**.
b) El momento angular se conserva únicamente si la **fuerza total** es **nula**.
c) El momento angular se conserva si la **fuerza total** es un **campo central**.

5. CUESTIÓN: Si un satélite artificial describe **órbitas circulares** alrededor de la Tierra, justifica cuál de las siguientes afirmaciones es **correcta** respecto a su **energía mecánica** E_m y sus **velocidades orbital** v y de **escape** v_e : (1 pt.)

- a) $E_m < 0$ y $v > v_e$ b) $E_m > 0$ y $v > v_e$
c) $E_m < 0$ y $v < v_e$ d) $E_m > 0$ y $v < v_e$

COMPLEMENTARIO

La intensidad de la gravedad en la superficie de la Tierra de radio R_T vale g_0 . En un punto A, fuera del planeta, esa intensidad vale $g_A = g_0/2$, mientras que en un punto B, más alejado que A, vale $g_B = g_0/4$. Datos: $R_T = 6370 \text{ km}$, $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$ Calcula:

- a) Las distancias desde los puntos A y B al centro de la Tierra. (0,5 pt.)
b) La velocidad con que debe lanzarse un satélite situado en una órbita circular a la distancia del punto A para situarlo en una órbita a la distancia del punto B. (Justifica la fórmula utilizada) (1 pt.)

$$\left. \begin{array}{l} r_A = 9 \cdot 10^6 \text{ m} \\ r_B = 1,27 \cdot 10^7 \text{ m} \end{array} \right\} v_n \approx 3590 \text{ m/s} = 3,59 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$



Isaac Newton

1. Se desea situar un satélite artificial de navegación de la serie GALILEO, con una masa de **700 kg**, en una **órbita circular intermedia** (MEO) a una **altura de 16000 km sobre la superficie terrestre**.

Datos: $R_T = 6370 \text{ km}$, $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$ Calcula:



- a) La **velocidad orbital** a esa altura. (**Justifica** la fórmula) (1 pt.)
 b) El **período** de la órbita en segundos y en horas. (0,5 pt.)
 c) La **energía necesaria** de **satelización**. (**Justifica** la fórmula) (1,5 pt.)
 d) La **velocidad** de **escape** desde esa **órbita**. (1 pt.)

a) Condición de órbita: $F_g = F_c \Rightarrow G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = G \frac{M}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$

No conozco ni G ni M , pero a partir de los datos: $g_0 = G \frac{M}{R_T^2} \Rightarrow G \cdot M = g_0 \cdot R_T^2$, luego: $v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}}$

El radio orbital $r = R_T + h = 6370 \text{ km} + 16000 \text{ km} = 22370 \text{ km} \approx 2,24 \cdot 10^7 \text{ m}$

$$v = \sqrt{\frac{9,81 \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2}{2,24 \cdot 10^7}} \approx 4215,508088 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 4,2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

b) El período orbital se deduce de $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2,24 \cdot 10^7}{4,2 \cdot 10^3} \approx 33510,321638 \text{ s} \approx 33510 \text{ s} \approx 9,31 \text{ h}$

c) Calculemos la energía de satelización: $E_{\text{necesaria}} = E_{m_B} - E_{m_A}$

$$-G \frac{Mm}{R_T} + 0 + E_{\text{necesaria}} = -G \frac{Mm}{r} + \frac{1}{2} m v^2 \quad r = R_T + h$$

En B, está en órbita: $G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{M}{r} = v^2$

$$E_{\text{necesaria}} = -G \frac{Mm}{r} + \frac{1}{2} m v^2 + G \frac{Mm}{R_T} = -G \frac{Mm}{r} + \frac{1}{2} m G \frac{M}{r} + G \frac{Mm}{R_T}$$

$$E_{\text{necesaria}} = GMm \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{R_T} \right) = GMm \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r} \right), \quad r = R_T + h; \quad \text{como } GM = g_0 R_T^2$$

$$E_{\text{necesaria}} = g_0 R_T^2 m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r} \right) \quad \text{Energía de satelización} \quad ; \quad \text{Masa del satélite: } m = 700 \text{ kg}$$

$$E_{\text{necesaria}} = 9,81 \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2 \cdot 700 \cdot \left(\frac{1}{6,37 \cdot 10^6} - \frac{1}{2 \cdot 2,24 \cdot 10^7} \right) \approx 3,752310 \times 10^{10} \text{ J} \approx 3,75 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

b) $\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} m v_e^2 - G \frac{Mm}{r} &= \frac{1}{2} m \cdot 0^2 - G \frac{Mm}{\infty} \\ \frac{1}{2} m v_e^2 &= G \frac{Mm}{r} \end{aligned} \right\} v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2g_0 R_T^2}{r}}$ Velocidad de escape

↑
radio orbital

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2}{2,24 \cdot 10^7}} \approx 5961,628710 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 5,96 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5,96 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

2. Tenemos una **masa de 5 kg** situada en el punto $A(-3,0)$ y otra **masa de 10 kg** situada en $B(3,0)$. Las distancias están medidas en metros. Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

- a) Calcula el **vector campo gravitatorio** en el punto $C(0,4)$. (1,5 pt.)
 b) Calcula el **vector campo gravitatorio** en el punto $D(0,0)$. (0,5 pt.)
 c) Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** una masa de **2 kg** desde el punto $C(0,4)$ hasta el punto $D(0,0)$. **Interpreta** el **signo del trabajo**. (1 pt.)

a) Calculamos primero los vectores unitarios hacia $C(0,4)$

$$\vec{u}_1 = \frac{(0,4) - (-3,0)}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) = \frac{3}{5} \vec{i} + \frac{4}{5} \vec{j}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(0,4) - (3,0)}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) = -\frac{3}{5} \vec{i} + \frac{4}{5} \vec{j}$$

$$r_1 = r_2 = 5 \text{ m}$$

Según el principio de superposición $\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$

$$\vec{g}_1 = -G \frac{m_1}{r_1^2} \vec{u}_1 = -G \frac{5}{5^2} \left(\frac{3}{5} \vec{i} + \frac{4}{5} \vec{j} \right) = -8 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 1,07 \cdot 10^{-11} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_2 = -G \frac{m_2}{r_2^2} \vec{u}_2 = -G \frac{10}{5^2} \left(-\frac{3}{5} \vec{i} + \frac{4}{5} \vec{j} \right) = +1,6 \cdot 10^{-11} \vec{i} - 2,13 \cdot 10^{-11} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 8 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 3,2 \cdot 10^{-11} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}} \text{ en } C(0,4)$$

$$|\vec{g}_T| = \sqrt{g_{Tx}^2 + g_{Ty}^2} = \sqrt{(8 \cdot 10^{-12})^2 + (3,2 \cdot 10^{-11})^2} \approx 3,298480 \times 10^{-11} \frac{\text{N}}{\text{kg}} \approx 3,3 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

b) Calculamos primero los vectores unitarios hacia $D(0,0)$ $\vec{u}_1 = \vec{i}$, $\vec{u}_2 = -\vec{i}$, $r_1 = r_2 = 3 \text{ m}$

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -G \frac{5}{3^2} \vec{i} - G \frac{10}{3^2} (-\vec{i}) = \frac{-G}{3^2} (5 - 10) \vec{i} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{3^2} \approx 3,705560 \times 10^{-11} \vec{i} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_T \approx 3,71 \cdot 10^{-11} \vec{i} \frac{\text{N}}{\text{kg}} \text{ en } D(0,0), \quad |\vec{g}_T| = 3,71 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

c) $W = \Delta E_c = -\Delta E_p$ $W_{C \rightarrow D} = -(E_{pD} - E_{pC})$, $m = 2 \text{ kg}$

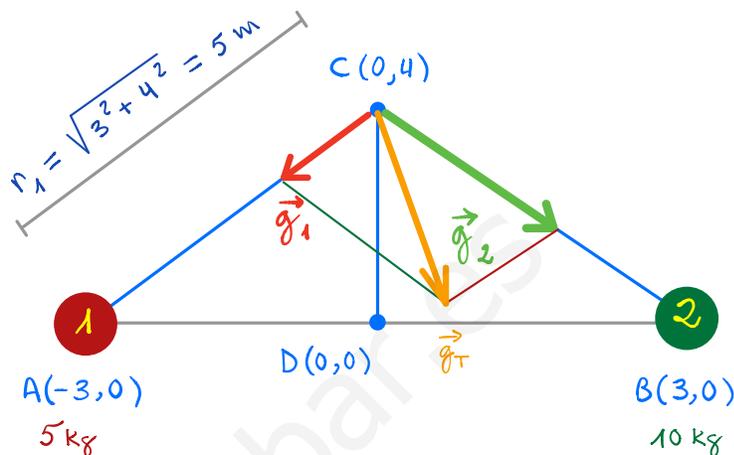
$$E_{pC} = E_{pC}(1) + E_{pC}(2) = -G \frac{5 \cdot 2}{5} - G \frac{10 \cdot 2}{5} = -G \cdot \frac{30}{5} = -G \cdot 6 \approx -4 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$E_{pD} = E_{pD}(1) + E_{pD}(2) = -G \frac{5 \cdot 2}{3} - G \frac{10 \cdot 2}{3} = -G \cdot \frac{30}{3} = -G \cdot 10 = -6,67 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$W_{C \rightarrow D} = -(E_{pD} - E_{pC}) = -(-6,67 \cdot 10^{-10} \text{ J} + 4 \cdot 10^{-10} \text{ J}) = +2,67 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$W_g > 0$ el trabajo lo realiza el campo gravitatorio.

Tiene sentido porque la masa se acerca a favor de la atracción gravitatoria de las otras dos.



3. Marte tiene dos satélites, llamados Fobos y Deimos, cuyas **órbitas** tienen **radios** de **9400** y **23000 km**, respectivamente. Fobos tarda **7,7 h** en dar una vuelta alrededor del planeta. Halla el **período** de Deimos en horas. (1 pt.)

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \text{cte}} \quad \text{3ª ley de Kepler} \Rightarrow \frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \quad \begin{array}{l} \text{Fobos} \equiv 1 \quad T_1 = 7,7 \text{ h} \quad r_1 = 9400 \text{ km} \\ \text{Deimos} \equiv 2 \quad T_2 = ? \quad r_2 = 23000 \text{ km} \end{array}$$

$$T_2^2 = \frac{T_1^2}{r_1^3} \cdot r_2^3 \Rightarrow T_2 = \sqrt{\frac{T_1^2}{r_1^3} \cdot r_2^3} = \sqrt{\frac{7,7^2}{9400^3} \cdot 23000^3} \approx 29.470717 \text{ h} \approx 29,5 \text{ h} \approx 106200 \text{ s}$$

4. CUESTIÓN: Señala cuál de las siguientes afirmaciones acerca de la **conservación del momento angular** de una partícula es **falsa** (**Justifica** la respuesta): (1 pt.)

- a) Si el momento angular se conserva, el **movimiento** es **plano**.
b) El momento angular se conserva únicamente si la **fuerza total** es **nula**.
 c) El momento angular se conserva si la **fuerza total** es un **campo central**.

En una fuerza central el radio vector y la fuerza son paralelos.

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}}$$

El momento de la fuerza es la variación del momento angular con respecto del tiempo.

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \text{ si } \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte}}$$

Principio de conservación del momento angular

$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen } \theta \quad \text{Módulo } (\theta = \text{ángulo que forman})$$

$$\vec{M} = 0 \text{ no sólo cuando } r \text{ o } F \text{ son nulos sino también cuando } \text{sen } \theta = 0, \text{ es decir, } \vec{r} \parallel \vec{F}.$$

En el caso de la gravedad $\theta = 180^\circ$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte}$; Se conserva.

La opción **b)** es la falsa. El momento angular se conserva aunque la fuerza no sea nula.

5. CUESTIÓN: Si un satélite artificial describe **órbitas circulares** alrededor de la Tierra, justifica cuál de las siguientes afirmaciones es **correcta** respecto a su **energía mecánica** E_m y sus **velocidades orbital** v y de **escape** v_e : (1 pt.)

- a) $E_m < 0$ y $v > v_e$ b) $E_m > 0$ y $v > v_e$
c) $E_m < 0$ y $v < v_e$ d) $E_m > 0$ y $v < v_e$

$$\text{La energía mecánica } E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{r}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si la masa está en órbita } F_g = F_c \Rightarrow G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow m v^2 = G \frac{Mm}{r} \\ E_m = -\frac{1}{2} \cdot G \frac{Mm}{r} < 0 \end{array} \right\}$$

Luego $E_m < 0$ y puesto que el satélite está en órbita $v < v_e$. Podemos comparar:

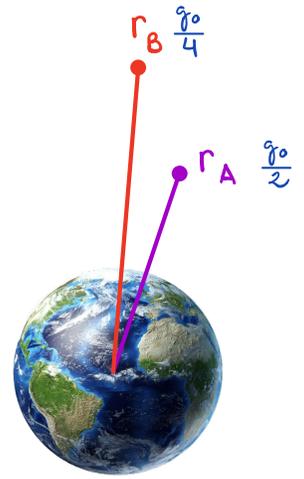
$$v = \sqrt{G \frac{M}{r}} \quad \text{y} \quad v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}; \text{ obviamente } \sqrt{G \frac{M}{r}} < \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

La respuesta correcta es **c)**.

COMPLEMENTARIO

La intensidad de la gravedad en la superficie de la Tierra de radio R_T vale g_0 . En un punto A, fuera del planeta, esa intensidad vale $g_A = g_0/2$, mientras que en un punto B, más alejado que A, vale $g_B = g_0/4$. Datos: $R_T = 6370$ km, $g_0 = 9,81$ m/s². Calcula:

- a) Las distancias desde los puntos A y B al centro de la Tierra. (0,5 pt.)
 b) La velocidad con que debe lanzarse un satélite situado en una órbita circular a la distancia del punto A para situarlo en una órbita a la distancia del punto B. (1 pt.)
 (Justifica la fórmula utilizada)



$$a) \quad g_A = \frac{g_0}{2} \Rightarrow G \frac{M_T}{r_A^2} = \frac{1}{2} \cdot G \frac{M_T}{R_T^2}$$

$$\text{Luego } r_A^2 = 2 \cdot R_T^2 \Rightarrow r_A = \sqrt{2} \cdot R_T = \sqrt{2} \cdot 6,37 \cdot 10^6 \approx 9 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$g_B = \frac{g_0}{4} \Rightarrow G \frac{M_T}{r_B^2} = \frac{1}{4} \cdot G \frac{M_T}{R_T^2}$$

$$\text{Luego } r_B^2 = 4 \cdot R_T^2 \Rightarrow r_B = \sqrt{4} \cdot R_T = 2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \approx 1,27 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$b) \quad E_{m_A} + E_{necesaria} = E_{m_B} \Rightarrow \boxed{E_{necesaria} = E_{m_B} - E_{m_A}}$$

$$E_{necesaria} = \left(\frac{1}{2} m v_B^2 - G \frac{Mm}{r_B} \right) - \left(\frac{1}{2} m v_A^2 - G \frac{Mm}{r_A} \right)$$

$$F_{c_B} = F_{g_B} \Rightarrow G \frac{M}{r_B} = v_B^2 \quad F_{c_A} = F_{g_A} \Rightarrow G \frac{M}{r_A} = v_A^2$$

$$E_{necesaria} = \left(\frac{1}{2} G \frac{Mm}{r_B} - G \frac{Mm}{r_B} \right) - \left(\frac{1}{2} G \frac{Mm}{r_A} - G \frac{Mm}{r_A} \right)$$

$$E_{necesaria} = -\frac{1}{2} G \frac{Mm}{r_B} + \frac{1}{2} G \frac{Mm}{r_A}$$

$$\boxed{E_{necesaria} = \frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)}$$

Energía de transferencia orbital

No conocemos ni G ni la masa de la Tierra. $g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$

$$E_{necesaria} = \frac{g_0 R_T^2 m}{2} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Además $E_{necesaria} = \frac{1}{2} m v_n^2$ ← Ésta es la velocidad pedida

$$\frac{1}{2} m v_n^2 = \frac{g_0 R_T^2 m}{2} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{v_n = R_T \cdot \sqrt{g_0 \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)}}$$

Velocidad de transferencia orbital

No conocemos la masa del satélite, pero se simplifica

$$v_n = 6,37 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{9,81 \left(\frac{1}{9 \cdot 10^6} - \frac{1}{1,27 \cdot 10^7} \right)} \approx 3589,646504 \text{ m/s}$$

$$v_n \approx 3590 \text{ m/s} = 3,59 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$