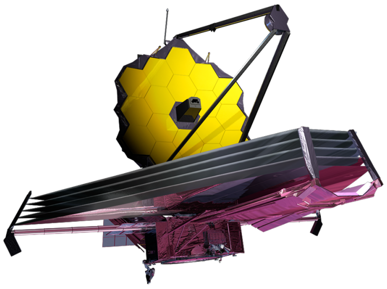
Nombre y apellidos: ____

1. El futuro telescopio espacial **James Webb** (colaboración *NASA* / *ESA*) de $6500\ kg$ de masa, se lanzará a finales del año 2021 hasta una órbita terrestre alta o **High Earth Orbit** (*HEO*) con un período orbital de $115{,}27$ *días terrestres*. Datos: $g_0 = 9{,}81\ m/s^2$, $R_T = 6370\ km$. Calcula:

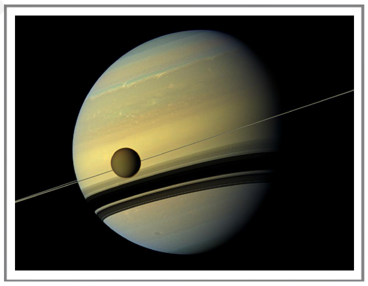


   a) El **radio orbital** del telescopio en torno a la Tierra. (**Justifica** la fórmula que utilices). (1,75 pt.)

   b) La **velocidad** orbital del telescopio a esa distancia. (0,75 pt.)

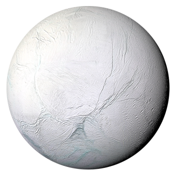
   c) El **peso del telescopio** en esa órbita. (1 pt.)

2. El satélite mayor de Saturno, **Titán**, describe una órbita a su alrededor de radio medio $r = 1{,}222 \cdot 10^6\ km$ en un período de $15{,}495$ días terrestres.



   a) Utilizando los datos de **Titán**, calcula la **masa** de **Saturno**. (2 pt.)
   Demuestra la **fórmula** que has utilizado.
   Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

   b) Halla el **período** de **Encélado**, otro satélite de Saturno, con un radio medio orbital de $238.000\ km$. (1,5 pt.)



3. **CUESTIÓN Justificada:** El **cometa Halley** se mueve en una órbita **elíptica** alrededor del Sol siendo el **afelio** el punto más alejado de la órbita y el **perihelio** el punto más cercano. **Justifica** cuál de las siguientes afirmaciones es **correcta**: (1 pt.)

   a) La velocidad orbital del cometa es mayor en el afelio que en el perihelio.

   b) La velocidad orbital del cometa es mayor en el perihelio que en el afelio.

   c) La velocidad orbital del cometa es constante porque el radio orbital medio es constante.

4. **CUESTIÓN Justificada:** Si g_0 es la intensidad de **campo** gravitatorio en la **superficie** marciana, **determina**, en función del **radio** de Marte R_M, la **altura** h sobre la superficie marciana a la cual la intensidad del campo gravitatorio es la tercera parte, es decir, $g_0/3$. (2 pt.)

   a) $h = \left(\sqrt{3} + 1\right) \cdot R_M$ b) $h = \sqrt{3} \cdot R_M$ c) $h = \left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot R_M$

1. El futuro telescopio espacial **James Webb** (colaboración *NASA / ESA*) de $6500\ kg$ de masa, se lanzará a finales del año 2021 hasta una órbita terrestre alta o **High Earth Orbit** (*HEO*) con un período orbital de $115{,}27$ *días terrestres*. Datos: $g_0 = 9{,}81\ m/s^2$, $R_T = 6370\ km$. Calcula:

a) El **radio orbital** del telescopio en torno a la Tierra. (**Justifica** la fórmula que utilices). (1,75 pt.)

b) La **velocidad** orbital del telescopio a esa distancia. (0,75 pt.)

c) El **peso del telescopio** en esa órbita. (1 pt.)

a) Condición de órbita: $\boxed{F_g = F_c} \Rightarrow G\dfrac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\dfrac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v^2 = G\dfrac{M}{r}$; sabemos que $v = \dfrac{2\pi\cdot r}{T}$

Despejamos directamente el radio orbital: $G\cdot\dfrac{M}{r} = v^2 = \left(\dfrac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2 = \dfrac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow G\cdot M\cdot T^2 = 4\pi^2 r^3 \Rightarrow$

$\boxed{r = \sqrt[3]{\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}}}$; No conozco ni G ni M, pero a partir de los datos: $\boxed{g_0 = G\dfrac{M}{R_T^2}} \Rightarrow G\cdot M = g_0\cdot R_T^2$, luego:

$\boxed{r = \sqrt[3]{\dfrac{g_0\cdot R_T^2\cdot T^2}{4\pi^2}}}$; $r = \sqrt[3]{\dfrac{9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot(6{,}37\cdot 10^6\ m)^2\cdot\left(115{,}27\ dia\cdot\frac{24h}{dia}\cdot\frac{3600s}{1h}\right)^2}{4\pi^2}} \simeq 10^9 m = 10^6\ km$

Nota: Si calculamos el período en segundos por separado $115{,}27\ dia\cdot\dfrac{24h}{dia}\cdot\dfrac{3600s}{1h} = 9.959.328s$

b) $\boxed{v = \dfrac{2\pi\cdot r}{T}} \Rightarrow v = \dfrac{2\pi\cdot 10^9 m}{115{,}27\ dia\cdot\frac{24h}{dia}\cdot\frac{3600s}{1h}} \simeq 630{,}9\ m/s$

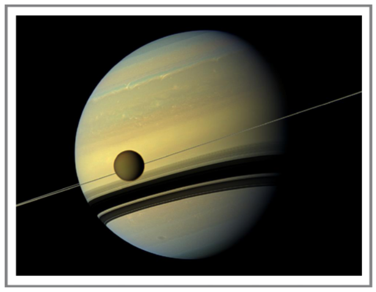
c) El peso en órbita $\boxed{P = m\cdot g}$ siendo $g = G\cdot\dfrac{M}{r^2} = \dfrac{g_0\cdot R_T^2}{r^2}$

$$P = m\cdot G\cdot\frac{M}{r^2} = m\cdot\frac{g_0\cdot R_T^2}{r^2} = 6.500\ kg\cdot\frac{9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot(6{,}37\cdot 10^6\ m)^2}{(10^9 m)^2} \simeq 2{,}59\ N$$

Método II: $g = a_c = \dfrac{v^2}{r} \Rightarrow P = m\cdot\dfrac{v^2}{r} = 6.500\ kg\cdot\dfrac{(630{,}9\ m/s)^2}{10^9 m} \simeq 2{,}59\ N$

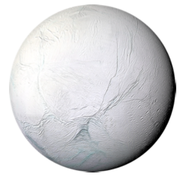
Son lo mismo el campo gravitatorio y la aceleración centrípeta.

2. El satélite mayor de Saturno, **Titán**, describe una órbita a su alrededor de radio medio $r = 1{,}222 \cdot 10^6\ km$ en un período de $15{,}495$ días terrestres.



   a) Utilizando los datos de **Titán**, calcula la **masa** de **Saturno**. (2 pt.)
   Demuestra la **fórmula** que has utilizado.
   Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

   b) Halla el **período** de **Encélado**, otro satélite de Saturno, con un radio medio orbital de $238.000\ km$. (1,5 pt.)



a) Utilizaremos la demostración de Newton de la 3ª ley de Kepler.

Condición de órbita: $\boxed{F_g = F_c} \Rightarrow G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{r}$; sabemos que $v = \frac{2\pi\cdot r}{T}$

$$G\cdot\frac{M}{r} = v^2 = \left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow G\cdot M\cdot T^2 = 4\pi^2 r^3 \Rightarrow \boxed{M = \frac{4\pi^2 r^3}{G\cdot T^2}}$$

Masa del cuerpo central (Saturno)

$$M = \frac{4\pi^2\cdot(1{,}222\cdot 10^9\ m)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{Kg^2}\cdot\left(15{,}495\ dia\cdot\frac{24h}{dia}\cdot\frac{3600s}{1h}\right)^2} \simeq 6{,}03\cdot 10^{26}\ kg$$ (Masa de Saturno)

La masa de Saturno es dos órdenes de magnitud (10^2) mayor que la masa de la Tierra.

b) Vamos a calcular el período de Encélado a partir de los datos de Titán utilizando la 3ª ley de Kepler ya que ambos satélites orbitan a Saturno.

$T \equiv$ Titán ; $e \equiv$ Encélado

$$\frac{T^2}{r^3} = cte \Rightarrow \frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{T_e^2}{r_e^3} \Rightarrow T_e = \sqrt{r_e^3\cdot\frac{T_T^2}{r_T^3}}$$

$$T_e = \sqrt{(2{,}38\cdot 10^5\ km)^3\cdot\frac{(15{,}495\ dia)^2}{(1{,}222\cdot 10^6\ km)^3}} \simeq 1{,}3318\ \text{días} \simeq 32h$$

$$T_e = 115.068\ s$$

El período orbital de Encélado es más corto que el de Titán porque orbita más cerca de Saturno.

3. **CUESTIÓN Justificada:** El **cometa Halley** se mueve en una órbita **elíptica** alrededor del Sol siendo el **afelio** el punto más alejado de la órbita y el **perihelio** el punto más cercano. **Justifica** cuál de las siguientes afirmaciones es **correcta**: (1 pt.)

a) La velocidad orbital del cometa es mayor en el afelio que en el perihelio.

b) La velocidad orbital del cometa es mayor en el perihelio que en el afelio.

c) La velocidad orbital del cometa es constante porque el radio orbital medio es constante.

Método I:

2ª ley de Kepler: Los planetas, en su órbita elíptica alrededor del Sol, barren áreas iguales en tiempos iguales. Se mueven más rápido cerca del Sol y más despacio lejos de él.

$$\boxed{r_{afelio} \cdot v_{afelio} = r_{perihelio} \cdot v_{perihelio}}$$

$r_p < r_a \Rightarrow v_p > v_a$

La respuesta correcta es la b

Método II: 3ª ley de Kepler: $\boxed{\dfrac{T^2}{r^3} = cte}$

Un radio orbital pequeño $r \Rightarrow$ Un período pequeño también $\Rightarrow$ Una velocidad grande

Un radio orbital grande $r \Rightarrow$ Un período grande también $\Rightarrow$ Una velocidad pequeña

Método III: $\boxed{F_g = F_c} \Rightarrow G\dfrac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\dfrac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v^2 = G\dfrac{M}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G\dfrac{M}{r}}$

Aunque esta fórmula se refiere a un movimiento circular, sirve para razonar que si el radio orbital es pequeño, la velocidad es grande y viceversa.

4. **CUESTIÓN Justificada:** Si g_0 es la intensidad de **campo** gravitatorio en la **superficie** marciana, **determina**, en función del **radio** de Marte R_M, la **altura** h sobre la superficie marciana a la cual la intensidad del campo gravitatorio es la tercera parte, es decir, $g_0/3$. (2 pt.)

a) $h = \left(\sqrt{3}+1\right) \cdot R_M$ b) $h = \sqrt{3} \cdot R_M$ c) $h = \left(\sqrt{3}-1\right) \cdot R_M$

$$g = \frac{g_0}{3}$$

$$\cancel{G} \cdot \frac{\cancel{M}}{r^2} = \frac{\cancel{G} \cdot \dfrac{\cancel{M}}{R_m^2}}{3}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{3 R_m^2}$$

$$3 R_m^2 = r^2$$

Tomo raíces cuadradas

$$\sqrt{3 R_m^2} = \sqrt{r^2}$$

$\sqrt{3} \cdot R_m = r$; Como $r = R_m + h$

$$h = r - R_m = \sqrt{3} \cdot R_m - R_m$$

$h = R_m\left(\sqrt{3} - 1\right)$; La respuesta correcta es la c