Nombre y apellidos: ____

1. El futuro telescopio espacial **Euclid** (ESA) de $850\ kg$ se lanzará en el año 2022 hasta una órbita terrestre alta o **High Earth Orbit** (HEO) a $1.500.000$ kilómetros de la Tierra (radio orbital), para estudiar la materia y energía oscuras del Universo. Datos: $g_0 = 9{,}81\ m/s^2$, $R_T = 6370\ km$. Calcula:

   a) La **velocidad orbital** a esa distancia. (**Justifica** la fórmula) (1,5 pt.)
   b) La **energía necesaria** de **satelización**. (**Justifica** la fórmula) (1,5 pt.)
   c) La **velocidad** de **escape desde** esa **órbita**. (**Justifica** la fórmula) (1 pt.)

2. Tenemos una **masa** de $200\ kg$ situada en el punto $A(0{,}0)$ y otra **masa** de $400\ kg$ situada en $B(8{,}0)$. Las distancias están medidas en metros. Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$
   a) Calcula el **vector campo gravitatorio** en el punto $C(4{,}3)$. (2 pt.)
   b) Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** una masa de $5\ kg$ desde el punto $C(4{,}3)$ hasta el **infinito**. **Interpreta** el **signo** del **trabajo**. (1 pt.)

3. CUESTIÓN: (**Justifica** la respuesta) Una masa se mueve dentro de un **campo gravitatorio**. Su **momento angular** respecto del centro de la fuerza…
   a) **aumenta** indefinidamente.
   b) es **cero** (nulo).
   c) es **constante** (se conserva). (1 pt.)

4. CUESTIÓN **Práctica:** En el centro de la Vía Láctea se encuentra el agujero negro supermasivo Sagitario A*. Está situado en el foco común de las órbitas elípticas de más de doscientas estrellas que lo orbitan. Calcula la **masa** en kg (y la **incertidumbre**) de **Sgr A*** a partir de las medidas del radio medio orbital, r, y del período, T, de las tres estrellas más próximas que lo orbitan (ver tabla adjunta).
   Justifica la fórmula que utilices. (**NO** hay que hacer la gráfica). (2 pt.)

   Datos:
   $1\ UA = 1{,}5 \cdot 10^8\ km$ (distancia Sol-Tierra)
   $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

Johannes Kepler

Estrella	T [años]	r [UA]
S1	94,1	3300
S2	15,2	980
S8	67,2	2630

COMPLEMENTARIO

Calcula el radio de un planeta que tiene una densidad tres veces mayor que la densidad de la Tierra y cuyo campo gravitatorio en la superficie es el doble que el de la Tierra. Calcula el resultado simbólicamente en función sólo del radio de la Tierra, R_T . No tienes ningún dato numérico. (1 pt.)

1. El futuro telescopio espacial **Euclid** (ESA) de $850\ kg$ se lanzará en el año 2022 hasta una órbita terrestre alta o **High Earth Orbit** (HEO) a $1.500.000$ kilómetros de la Tierra (radio orbital), para estudiar la materia y energía oscuras del Universo. Datos: $g_0 = 9{,}81\ m/s^2$, $R_T = 6370\ km$. Calcula:

   a) La **velocidad orbital** a esa distancia. (**Justifica** la fórmula) (1,5 pt.)
   b) La **energía necesaria** de **satelización**. (**Justifica** la fórmula) (1,5 pt.)
   c) La **velocidad** de **escape desde** esa **órbita**. (**Justifica** la fórmula) (1 pt.)

a) Condición de órbita: $\boxed{F_g = F_c} \Rightarrow G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$

No conozco ni G ni M, pero a partir de los datos: $g_0 = G\frac{M}{R_T^2} \Rightarrow G\cdot M = g_0\cdot R_T^2$, luego: $v = \sqrt{\frac{g_0\cdot R_T^2}{r}}$

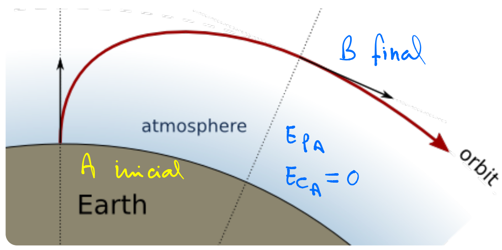
El radio orbital $r = 1{,}5\cdot 10^6\ km = 1{,}5\cdot 10^9\ m$, $R_T = 6{,}37\cdot 10^6\ m$

$v = \sqrt{\frac{g_0\cdot R_T^2}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}81(6{,}37\cdot 10^6)^2}{1{,}5\cdot 10^9}} \approx 515.143597\ m/s \simeq 515\ m/s \simeq 5{,}15\cdot 10^2\ m/s$

b) Calculemos la energía de satelización: $\boxed{E_{necesaria} = Em_B - Em_A}$ Energía de satelización [J]

$Em_A + E_{necesaria} = Em_B$

$-G\frac{Mm}{R_T} + 0 + E_{necesaria} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2$,



En B, está en órbita: $G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow G\frac{M}{r} = v^2$

$E_{necesaria} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 + G\frac{Mm}{R_T}$

$E_{necesaria} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}m\,G\frac{M}{r} + G\frac{Mm}{R_T}$ Energía de satelización [J]

$E_{necesaria} = GMm\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{R_T}\right) = GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right) \Rightarrow E_{necesaria} = GMm\cdot\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2\cdot r}\right)$,

$G\cdot M = g_0\cdot R_T^2$, luego: $E_{necesaria} = g_0 R_T^2 m\cdot\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2\cdot r}\right) = 9{,}81(6{,}37\cdot 10^6)^2\cdot 850\cdot\left(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6} - \frac{1}{2\cdot 1{,}5\cdot 10^9}\right) \approx 5.300350\times 10^{10}\ J$

$E_{necesaria} \simeq 5{,}3\cdot 10^{10}\ J$ Como es lógico, la energía de satelización es positiva.

c) $E_c + E_p = E_{c\infty} + E_{p\infty}$ (no tenemos en cuenta la Ec)

$\frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{Mm}{r} = \underbrace{\frac{1}{2}m\cdot 0^2}_{0} - \underbrace{G\frac{Mm}{\infty}}_{0}$

$\frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2 = G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r} \Rightarrow v_e^2 = \frac{2\cdot G\cdot M}{r}$

$g_0 = G\cdot\frac{M}{R_T^2} \Rightarrow G\cdot M = g_0\cdot R_T^2$

$v_e = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{2g_0\cdot R_T^2}{r}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}81(6{,}37\cdot 10^6)^2}{1{,}5\cdot 10^9}} \approx 728.523062\ \frac{m}{s}$

radio orbital

Velocidad de escape $v_e \simeq 7{,}29\cdot 10^2\ m/s$

2. Tenemos una **masa** de $200\ kg$ situada en el punto $A(0{,}0)$ y otra **masa** de $400\ kg$ situada en $B(8{,}0)$. Las distancias están medidas en metros. Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

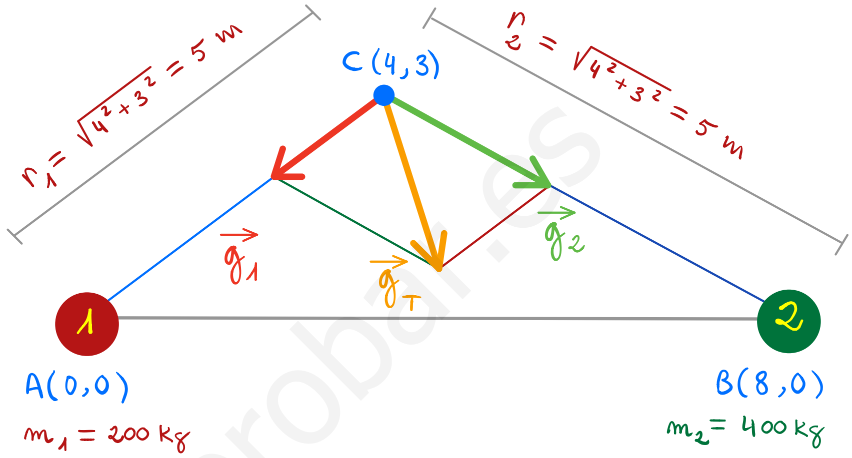
a) Calcula el **vector campo gravitatorio** en el punto $C(4{,}3)$. (2 pt.)

b) Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** una masa de $5\ kg$ desde el punto $C(4{,}3)$ hasta el **infinito**. **Interpreta** el **signo** del **trabajo**. (1 pt.)

a) Calculamos primero los vectores unitarios hacia $C(4,3)$

$$\vec{u}_1 = \frac{(4,3)-(0,0)}{\sqrt{4^2+3^2}} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}\vec{\imath} + \frac{3}{5}\vec{\jmath}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(4,3)-(8,0)}{\sqrt{4^2+3^2}} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}\vec{\imath} + \frac{3}{5}\vec{\jmath}$$



Esperamos un campo más fuerte creado por la masa de 400 kg y que el campo total tenga sentido hacia la derecha y hacia abajo.

Según el principio de superposición $\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r}$$ Campo gravitatorio (forma vectorial) $\left[\frac{N}{kg} = \frac{m}{s^2}\right]$

$$\vec{g}_1 = -G\frac{m_1}{r_1^2}\vec{u}_1 = -G\frac{200}{5^2}\cdot\left(\frac{4}{5}\vec{\imath} + \frac{3}{5}\vec{\jmath}\right) = -4{,}27\cdot 10^{-10}\,\vec{\imath} - 3{,}2\cdot 10^{-10}\,\vec{\jmath}\ \frac{N}{kg}$$

$$\vec{g}_2 = -G\frac{m_2}{r_2^2}\vec{u}_2 = -G\frac{400}{5^2}\cdot\left(-\frac{4}{5}\vec{\imath} + \frac{3}{5}\vec{\jmath}\right) = 8{,}54\cdot 10^{-10}\,\vec{\imath} - 6{,}4\cdot 10^{-10}\,\vec{\jmath}\ \frac{N}{kg}$$

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 4{,}27\cdot 10^{-10}\,\vec{\imath} - 9{,}6\cdot 10^{-10}\,\vec{\jmath}\ \frac{N}{kg} \quad \text{en } C(4,3)$$

$$|\vec{g}_T| = \sqrt{g_{Tx}^2 + g_{Ty}^2} = \sqrt{(4{,}27\cdot 10^{-10})^2 + (9{,}6\cdot 10^{-10})^2} \approx 1.050680\times 10^{-9}\ \frac{N}{kg} \simeq 1{,}05\cdot 10^{-10}\ \frac{N}{kg}$$

Calculemos ahora el potencial: $\boxed{V = \frac{E_p}{m} = -G\frac{M}{r}}$ Potencial gravitatorio (escalar) $\left[\frac{J}{kg}\right]$

$$V_T = V_1 + V_2 \ ,\quad V_T = -G\cdot\frac{M}{r} = -G\cdot\left[\frac{200}{5} + \frac{400}{5}\right] \simeq -8\cdot 10^{-9}\ \frac{J}{kg}$$

b) $\boxed{W_{A\to B} = -m\cdot(V_B - V_A)}$, $m = 5\,kg$, $V_\infty = -G\frac{M}{\infty} = 0$

$$W_{C\to\infty} = -m\cdot(V_\infty - V_c) = -5\,kg\cdot\left(0 - \left(-8\cdot 10^{-9}\ \frac{J}{kg}\right)\right) \simeq -4\cdot 10^{-8}\ J$$

$W_g < 0$ El trabajo lo realiza una fuerza externa en contra del campo gravitatorio.

Tiene sentido porque la masa se aleja en contra de la atracción gravitatoria de las otras dos.

3. CUESTIÓN: (**Justifica** la respuesta) Una masa se mueve dentro de un **campo gravitatorio**. Su **momento angular** respecto del centro de la fuerza…

a) **aumenta** indefinidamente.

b) es **cero** (nulo).

c) es **constante** (se conserva). (1 pt.)

$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}}$ El momento de la fuerza es la variación del momento angular con respecto del tiempo.

$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \text{ si } \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte}$ Principio de conservación del momento angular

$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \operatorname{sen}\theta$ Módulo (θ = ángulo que forman)

$\vec{M} = 0$ no sólo cuando r o F son nulos sino también cuando $\operatorname{sen}\theta = 0$, es decir, $\vec{r} \parallel \vec{F}$.

En el caso de la gravedad $\theta = 180°$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$; Se conserva. $\boxed{\vec{L} = |\vec{r} \times \vec{p}| = cte}$

Luego, la única opción verdadera es la c

4. CUESTIÓN **Práctica:** En el centro de la Vía Láctea se encuentra el agujero negro supermasivo Sagitario A*. Está situado en el foco común de las órbitas elípticas de más de doscientas estrellas que lo orbitan. Calcula la **masa** en kg (y la **incertidumbre**) de **Sgr A*** a partir de las medidas del radio medio orbital, r, y del período, T, de las tres estrellas más próximas que lo orbitan (ver tabla adjunta). **Justifica** la fórmula que utilices. (**NO** hay que hacer la gráfica). (2 pt.)

Datos:
$1\ UA = 1{,}5 \cdot 10^8\ km$ (distancia Sol-Tierra)
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

Johannes Kepler

Estrella	T [años]	r [UA]
S1	94,1	3300
S2	15,2	980
S8	67,2	2630

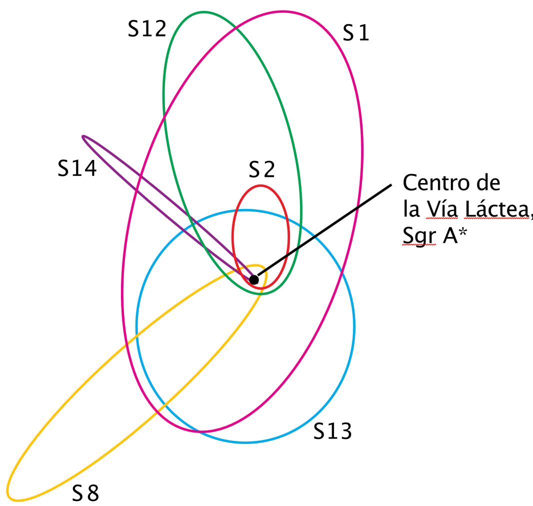
De acuerdo con la condición de órbita $F_g = F_c$

$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow G\frac{M}{r} = v^2$

En el movimiento circular $v = \frac{2\pi r}{T}$

$G\frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$

$G\frac{M}{r} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = K} \Rightarrow \boxed{T^2 = K \cdot r^3}$ magnitudes directamente proporcionales



Podemos también calcular la masa de Sgt A* analíticamente:

$\boxed{M_{A^*} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}}$, Pasamos a unidades S.I.

$1\ UA = 1{,}5 \cdot 10^8\ km = 1{,}5 \cdot 10^{11}\ km$

$s_1 \Rightarrow T_1 = 94{,}1 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 2967537600\ s \quad ; \quad r_1 = 3300 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11} = 4.95 \times 10^{14}\ m$

$s_2 \Rightarrow T_2 = 15{,}2 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 479347200 \quad ; \quad r_2 = 980 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11} = 1.47 \times 10^{14}\ m$

$s_8 \Rightarrow T_8 = 67{,}2 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 2119219200 \quad ; \quad r_8 = 2630 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11} = 3.945 \times 10^{14}\ m$

Con los datos de : $s_1 \Rightarrow M_{A^*} = \dfrac{4 \cdot \pi^2 \cdot (4{,}95 \cdot 10^{14})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (2967537600)^2} \approx 8.151870 \times 10^{36}\ kg$

Con los datos de : $s_2 \Rightarrow M_{A^*} = \dfrac{4 \cdot \pi^2 \cdot (1{,}47 \cdot 10^{14})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (479347200)^2} \approx 8.182490 \times 10^{36}\ kg$

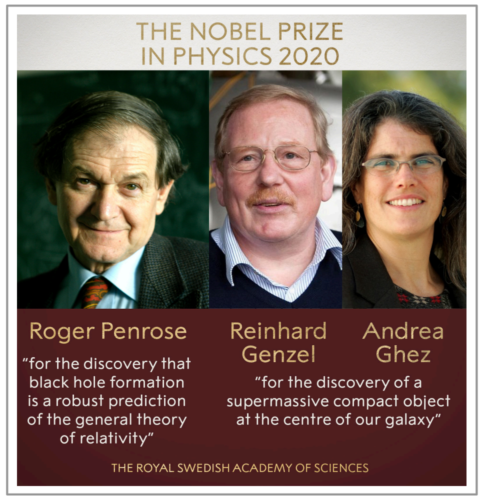
Con los datos de : $s_8 \Rightarrow M_{A^*} = \dfrac{4 \cdot \pi^2 \cdot (3{,}95 \cdot 10^{14})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (2119219200)^2} \approx 8.122190 \times 10^{36}\ kg$

La media de la masa Sgt A*, $\overline{M}_{A^*} = \dfrac{8{,}15 + 8{,}18 + 8{,}12}{3} \cdot 10^{36} \simeq 8{,}15 \cdot 10^{36}\ kg$ Tomo 2 decimales arbitrariamente

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}}$$

Desviación típica : cuantifica la incertidumbre de la medida.

$n = 3$



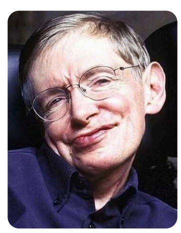
$$\sigma = \sqrt{\frac{(8{,}15-8{,}15)^2 + (8{,}18-8{,}15)^2 + (8{,}12-8{,}15)^2}{2}} \cdot 10^{36} = 3 \times 10^{34}\ kg$$

La medida se expresa como media ± incertidumbre : $\overline{x} \pm \sigma$,

En nuestro caso $\overline{M}_{A^*} \pm \sigma = 8{,}15 \cdot 10^{36}\ kg \pm 3 \cdot 10^{34}\ kg$

o bien $\overline{M}_{A^*} \pm \sigma = (8{,}15 \pm 0{,}03) \cdot 10^{36}\ kg$

El error relativo $\boxed{E_r = \dfrac{\sigma}{\overline{M}_{A^*}} \cdot 100} = \dfrac{0{,}03}{8{,}15} \cdot 100 = 0{,}37\ \%$



Stephen Hawking

Andreas Eckart

COMPLEMENTARIO

Calcula el radio de un planeta que tiene una densidad tres veces mayor que la densidad de la Tierra y cuyo campo gravitatorio en la superficie es el doble que el de la Tierra. Calcula el resultado simbólicamente en función sólo del radio de la Tierra, R_T . No tienes ningún dato numérico. (1 pt.)

$\rho = 3\rho_T$ densidad del planeta

$g_0 = 2 \cdot g_{0T}$ campo gravitatorio en la superficie del planeta $\Rightarrow \dfrac{g_0}{g_{0T}} = 2$ [1]

$$\left.\begin{aligned} g_0 &= G \cdot \frac{M}{R^2} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{R^2} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R \\ g_{0T} &= G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = \frac{\rho_T \cdot \frac{4}{3}\pi R_T^3}{R_T^2} = \rho_T \cdot \frac{4}{3}\pi R_T \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{g_0}{g_{0T}} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R}{\rho_T \cdot \frac{4}{3}\pi R_T} = \frac{3\rho_T \cdot \frac{4}{3}\pi R}{\rho_T \cdot \frac{4}{3}\pi R_T} = \frac{3R}{R_T} \quad [2]$$

$$[1] = [2] \Rightarrow \frac{g_0}{g_{0T}} = 2 = \frac{3R}{R_T} \Rightarrow \boxed{R = \frac{2}{3} R_T}$$