Nombre y apellidos: ____

1. La futura misión **Artemis I** de la *NASA*, se lanzará a finales del año 2022 hasta una órbita alrededor de la Luna a $300\ km$ por encima de su superficie. Calcula:

   a) La **velocidad** orbital del **Artemis I** a esa distancia en m/s y km/h (**Justifica** la fórmula que utilices). (1,5 pt.)

   b) El **período orbital** del **Artemis I** en torno a la Luna en **horas**. (0,75 pt.)

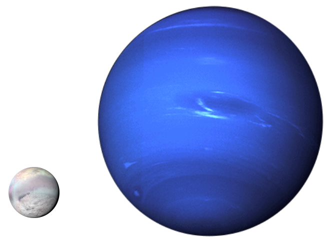
   c) La **intensidad del campo gravitatorio** en esa órbita. (0,75 pt.)

   Datos de la Luna: $g_{0L} = 1{,}62\ m/s^2$, $R_L = 1727\ km$

2. El segundo mayor satélite de Neptuno, **Proteus**, describe una órbita a su alrededor con un radio orbital medio de $117.600\ km$ en un período de $1{,}12$ días terrestres.

   a) Utilizando los datos de **Proteus**, calcula la **masa** de **Neptuno**. (1,5 pt.) (**Demuestra** la **fórmula** que has utilizado)

   b) Calcula el **período (en días)** del satélite más grande de Neptuno, **Tritón**, cuyo radio orbital es de $355.200\ km$. (1 pt.)



   Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

3. La distancia máxima de la Tierra hasta el Sol (**afelio**) es $1{,}521 \cdot 10^{11}\ m$ y su máxima aproximación (**perihelio**) es $1{,}471 \cdot 10^{11}\ m$. La **velocidad orbital** de la Tierra en el **perihelio** es $3{,}027 \cdot 10^4\ m/s$.

   a) Calcula el **radio medio** de la órbita de la Tierra. (0,5 pt.)

   b) Calcula la **velocidad en el afelio**. (1 pt.)

4. **CUESTIÓN Justificada:** Un mismo planeta, describiendo circunferencias alrededor del Sol, irá más rápido:

   a) Cuanto **mayor** sea el radio de la órbita.

   b) Cuanto **menor** sea el radio de la órbita.

   c) La velocidad **no depende** del tamaño de la órbita. (1 pt.)

5. **CUESTIÓN Justificada:** Dos satélites artificiales describen **órbitas circulares** alrededor de un planeta de radio R, siendo los **radios de sus órbitas** respectivas $r_1 = 1{,}050 \cdot R$ y $r_2 = 1{,}512 \cdot R$.
La **relación entre sus velocidades de giro** es:

   a) $\dfrac{v_1}{v_2} = 1{,}44$ b) $\dfrac{v_1}{v_2} = 2{,}07$ c) $\dfrac{v_1}{v_2} = 1{,}2$ (2 pt.)

1. La futura misión **Artemis I** de la *NASA*, se lanzará a finales del año 2022 hasta una órbita alrededor de la Luna a $300\ km$ por encima de su superficie. Calcula:

a) La **velocidad** orbital del **Artemis I** a esa distancia en m/s y km/h (**Justifica** la fórmula que utilices). (1,5 pt.)

b) El **período orbital** del **Artemis I** en torno a la Luna en **horas**. (0,75 pt.)

c) La **intensidad del campo gravitatorio** en esa órbita. (0,75 pt.)

Datos de la Luna: $g_{0L} = 1{,}62\ m/s^2$, $R_L = 1727\ km$

a) Condición de órbita: $\boxed{F_g = F_c} \Rightarrow G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{r} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{G\frac{M}{r}}}$

No conozco ni G ni M, pero a partir de los datos: $g_0 = G\frac{M}{R_L^2} \Rightarrow G\cdot M = g_0\cdot R_L^2$, luego: $v = \sqrt{\frac{g_0\cdot R_L^2}{r}}$

$h = 300\ km = 3\cdot 10^5\ m$, $R_L = 1{,}727\cdot 10^6\ m \Rightarrow$ El radio orbital $r = R_L + h = 2{,}027\cdot 10^6\ m$

$v = \sqrt{\frac{g_0\cdot R_L^2}{r}} = \sqrt{\frac{1{,}62\cdot(1{,}727\cdot 10^6)^2}{2{,}027\cdot 10^6}} \simeq 1544\ m/s \simeq 1{,}544\cdot 10^3\ \frac{m}{s}\cdot\frac{3600\ s}{1\ h}\cdot\frac{1\ km}{10^3\ m} \simeq 5{,}5584\cdot 10^3\ km/h$

b) $\boxed{v = \frac{2\pi\cdot r}{T}} \Rightarrow T = \frac{2\pi\cdot r}{v} = \frac{2\pi\cdot 2027\ km}{5{,}5584\cdot 10^3\ km/h} \simeq 2{,}29\ h$

c) El campo gravitatorio $g = G\cdot\frac{M}{2} = \frac{g_0\cdot R_L^2}{r^2} = \frac{1{,}62\cdot(1{,}727\cdot 10^6)^2}{(2{,}027\cdot 10^6)^2} \simeq 1{,}176\ m/s^2$

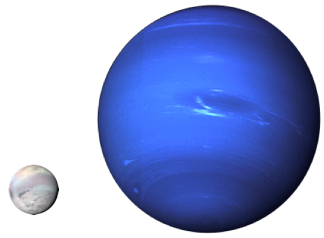
Método II: $g = a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(1{,}544\cdot 10^3\ m/s)^2}{2{,}027\cdot 10^6} \simeq 1{,}176\ m/s^2$

Son lo mismo el campo gravitatorio y la aceleración centrípeta.

2. El segundo mayor satélite de Neptuno, **Proteus**, describe una órbita a su alrededor con un radio orbital medio de $117.600\ km$ en un período de $1{,}12$ días terrestres.

   a) Utilizando los datos de **Proteus**, calcula la **masa** de **Neptuno**. (1,5 pt.)
   (**Demuestra** la **fórmula** que has utilizado)

   b) Calcula el **período (en días)** del satélite más grande de Neptuno, **Tritón**, cuyo radio orbital es de $355.200\ km$. (1 pt.)



   Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

a) Utilizaremos la demostración de Newton de la 3ª ley de Kepler.

Condición de órbita: $\boxed{F_g = F_c} \Rightarrow G\dfrac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\dfrac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v^2 = G\dfrac{M}{r}$; sabemos que $v = \dfrac{2\pi\cdot r}{T}$

$$G\cdot\frac{M}{r} = v^2 = \left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow G\cdot M\cdot T^2 = 4\pi^2 r^3 \Rightarrow \boxed{M = \frac{4\pi^2 r^3}{G\cdot T^2}}$$

Masa del cuerpo central (Neptuno)

Cambios de unidades: $r_{proteus} = 117.600\ km = 1{,}176\cdot 10^8\ m$; $T_P = 1{,}12\ dia \cdot \dfrac{24h}{dia}\cdot\dfrac{3600s}{1h} = 96768\ s$

$$M = \frac{4\pi^2\cdot(1{,}176\cdot 10^8\ m)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{Kg^2}\cdot(96768\ s)^2} \simeq 1{,}028\cdot 10^{26}\ kg \text{ (Masa de Neptuno)}$$

La masa de Neptuno es dos órdenes de magnitud (10^2) mayor que la masa de la Tierra.

b) Vamos a calcular el período de Tritón a partir de los datos de Proteus utilizando la 3ª ley de Kepler ya que ambos satélites orbitan a Neptuno.

$P \equiv$ Proteus ; $T \equiv$ Tritón ; Sabemos que el radio orbital de Tritón $r_T = 355.200\ km$

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = cte} \Rightarrow \frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{T_P^2}{r_P^3} \Rightarrow T_T = \sqrt{r_T^3\cdot\frac{T_P^2}{r_P^3}} = T_P\cdot\sqrt{\frac{r_T^3}{r_P^3}}$$

$$T_T = (1{,}12\ dia)^2\cdot\sqrt{\frac{(355.200\ km)^3}{(117.600\ km)^3}} \simeq 5{,}88\ \text{días}$$

El período orbital de Tritón es más largo que el de Proteus porque orbita más lejos de Neptuno.

3. La distancia máxima de la Tierra hasta el Sol (**afelio**) es $1{,}521 \cdot 10^{11}\ m$ y su máxima aproximación (**perihelio**) es $1{,}471 \cdot 10^{11}\ m$. La **velocidad orbital** de la Tierra en el **perihelio** es $3{,}027 \cdot 10^{4}\ m/s$.

   a) Calcula el **radio medio** de la órbita de la Tierra. (0,5 pt.)

   b) Calcula la **velocidad en el afelio**. (1 pt.)

a) $\boxed{r_{medio} = \dfrac{r_{afelio} + r_{perihelio}}{2}} = \dfrac{1{,}521 \cdot 10^{11} + 1{,}471 \cdot 10^{11}}{2} \simeq 1{,}496 \cdot 10^{11}\ m$

Propiedad de la Elipse

b) $\boxed{r_{afelio} \cdot v_{afelio} = r_{perihelio} \cdot v_{perihelio}} \Rightarrow v_{afelio} = \dfrac{r_{perihelio} \cdot v_{perihelio}}{r_{afelio}}$

2ª ley de Kepler

$\Rightarrow v_{afelio} = \dfrac{1{,}521 \cdot 10^{11}\ m \cdot 3{,}027 \cdot 10^{4}\ m/s}{1{,}471 \cdot 10^{11}\ m} \simeq 29275\ m/s$; Lógicamente $v_{afelio} < v_{perihelio}$

4. **CUESTIÓN Justificada:** Un mismo planeta, describiendo circunferencias alrededor del Sol, irá más rápido:

   a) Cuanto **mayor** sea el radio de la órbita.

   b) Cuanto **menor** sea el radio de la órbita.

   c) La velocidad **no depende** del tamaño de la órbita. (1 pt.)

Método I: A partir de la fórmula de la velocidad orbital:

Condición de órbita: $\boxed{F_g = F_c} \Rightarrow G\dfrac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\dfrac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v^2 = G\dfrac{M}{r} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{G\dfrac{M}{r}}}$,

podemos razonar que si el radio orbital es mayor, la velocidad es menor y viceversa.

$r_p < r_a \Rightarrow v_p > v_a \Rightarrow$ La respuesta correcta es la b

Método II: 3ª ley de Kepler: $\boxed{\dfrac{T^2}{r^3} = cte}$

Un radio orbital pequeño r $\Rightarrow$ Un período pequeño también $\Rightarrow$ Una velocidad grande

Un radio orbital grande r $\Rightarrow$ Un período grande también $\Rightarrow$ Una velocidad pequeña

5. **CUESTIÓN Justificada:** Dos satélites artificiales describen **órbitas circulares** alrededor de un planeta de radio R, siendo los **radios de sus órbitas** respectivas $r_1 = 1{,}050 \cdot R$ y $r_2 = 1{,}512 \cdot R$.
La **relación entre sus velocidades de giro** es:

a) $\dfrac{v_1}{v_2} = 1{,}44$ b) $\dfrac{v_1}{v_2} = 2{,}07$ c) $\dfrac{v_1}{v_2} = 1{,}2$ (2 pt.)

Método I: A partir de la fórmula de la velocidad orbital:

Condición de órbita: $\boxed{F_g = F_c} \Rightarrow G\dfrac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\dfrac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v^2 = G\dfrac{M}{r} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{G\dfrac{M}{r}}}$,

La razón $$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{G\frac{M}{r_1}}}{\sqrt{G\frac{M}{r_2}}} = \sqrt{\frac{\cancel{G}\frac{\cancel{M}}{r_1}}{\cancel{G}\frac{\cancel{M}}{r_2}}} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{\frac{1{,}512 \cdot \cancel{R}}{1{,}050 \cdot \cancel{R}}} = 1{,}2$$

La respuesta correcta es la c

Método II: 3ª ley de Kepler: $\boxed{\dfrac{T^2}{r^3} = cte}$ (es más largo)

$$\boxed{v = \frac{2\pi \cdot r}{T}} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{\cancel{2\pi} \cdot r_1}{T_1}}{\frac{\cancel{2\pi} \cdot r_2}{T_2}} = \frac{r_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot r_2} \quad [ec. 1]$$

3ª ley de Kepler: $$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \Rightarrow \frac{r_2^3}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{T_1^2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{r_2^3}{r_1^3}} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \quad [ec. 2]$$

Sustituimos la [ec. 2] en la [ec. 1]:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot r_2} = \frac{\cancel{r_1}}{\cancel{r_2}} \cdot \frac{\cancel{r_2}}{\cancel{r_1}} \cdot \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{\frac{1{,}512 \cdot \cancel{R}}{1{,}050 \cdot \cancel{R}}} = 1{,}2$$

La respuesta correcta es la c