

1. (7.5p) Resuelve las ecuaciones:

a. (2p) $4 - \frac{1}{x^2} = \frac{18}{x^4}$

b. (2p) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = 5$

c. (1.5p) $9^{2x-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

d. (2p) $1 + 9^x = 3^{x+1} + 3^{x-1}$

2. (1.5p) Factoriza el polinomio $P(x) = x^4 + x^2 + 2x$

3. (1p) Un número es dos unidades mayor que otro y la diferencia de sus cuadrados vale 96, ¿de qué números se tratan?

SOLUCIÓN

1. Resuelve las ecuaciones:

a. $4 - \frac{1}{x^2} = \frac{18}{x^4}$

b. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = 5$

c. $9^{2x-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

d. $1 + 9^x = 3^{x+1} + 3^{x-1}$

a. $4 - \frac{1}{x^2} = \frac{18}{x^4} \rightarrow \frac{4x^4}{x^4} - \frac{x^2}{x^4} = \frac{18}{x^4} \rightarrow 4x^4 - x^2 - 18 = 0$

Ecuación bicuadrada, realizando el cambio de variable $x^2 = t \rightarrow 4t^2 - t - 18 = 0$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-18)}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 288}}{8} = \frac{1 \pm 17}{8}$$

$$t_1 = \frac{1 + 17}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$t_2 = \frac{1 - 17}{8} = -2 \rightarrow x^2 = -2 \rightarrow x = \pm \sqrt{-2} = \text{No válida}$$

b. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = 5 \rightarrow \sqrt{2x+1} = 5 - \sqrt{x} \rightarrow (\sqrt{2x+1})^2 = (5 - \sqrt{x})^2 \rightarrow$

$$2x + 1 = 25 + (\sqrt{x})^2 - 10\sqrt{x} \rightarrow 2x + 1 = 25 + x - 10\sqrt{x} \rightarrow$$

$$10\sqrt{x} = 25 + x - 2x - 1 \rightarrow 10\sqrt{x} = 24 - x \rightarrow (10\sqrt{x})^2 = (24 - x)^2 \rightarrow$$

$$10^2(\sqrt{x})^2 = 576 - 48x + x^2 \rightarrow 100x = 576 - 48x + x^2 \rightarrow x^2 - 148x + 576 = 0$$

$$x = \frac{148 \pm \sqrt{(-148)^2 - 4 \cdot 576}}{2} = \frac{148 \pm \sqrt{19600}}{2} = \frac{148 \pm 140}{2}$$

$$x_1 = \frac{148 + 140}{2} = 144 \rightarrow \checkmark \sqrt{2 \cdot 144 + 1} + \sqrt{144} = 5? \rightarrow 29 \neq 5 \rightarrow \text{No válida}$$

$$x_2 = \frac{148 - 140}{2} = 4 \rightarrow \checkmark \sqrt{2 \cdot 4 + 1} + \sqrt{4} = 5? \rightarrow 5 = 5 \rightarrow \text{Válida}$$

c. $9^{2x-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \rightarrow (3^2)^{2x-1} = \frac{1}{3^{1/3}} \rightarrow 3^{4x-2} = 3^{-1/3} \rightarrow 4x - 2 = -\frac{1}{3} \rightarrow 12x - 6 = -1 \rightarrow$

$$12x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{12}$$

d. $1 + 9^x = 3^{x+1} + 3^{x-1} \rightarrow 1 + (3^2)^x = 3^x \cdot 3 + \frac{3^x}{3} \rightarrow 1 + (3^x)^2 = 3^x \cdot 3 + \frac{3^x}{3}$

Realizando el cambio de variable $3^x = t$,

$$1 + t^2 = 3t + \frac{t}{3} \rightarrow \frac{3 + 3t^2}{3} = \frac{9t + t}{3} \rightarrow 3t^2 - 10t + 3 = 0$$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (3)}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}$$

$$t_1 = \frac{10 + 8}{6} = 3 \rightarrow 3^x = 3 \rightarrow x = 1$$

$$t_2 = \frac{10 - 8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \rightarrow 3^x = 3^{-1} \rightarrow x = -1$$

2. Factoriza el polinomio $P(x) = x^4 + x^2 + 2x$

Buscamos las raíces resolviendo la ecuación de cuarto grado $x^4 + x^2 + 2x = 0$.

Extraemos factor común $x(x^3 + x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^3 + x + 2 = 0 \end{cases}$

	1	0	1	2
-1		-1	1	-2
	1	-1	2	0

Luego $x_2 = -1$. Obtenemos las otras dos raíces resolviendo la ecuación de segundo grado $x^2 - x + 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \nexists$$

Considerando las dos raíces obtenidas, la expresión factorizada es $P(x) = x(x + 1)(x^2 - x + 2)$

3. Un número es dos unidades mayor que otro y la diferencia de sus cuadrados es 96, ¿de qué números se tratan?

Si un número es x , el otro será $x + 2$. Como la diferencia de sus cuadrados es positiva:

$$(x + 2)^2 - x^2 = 96 \rightarrow x^2 + 4x + 4 - x^2 = 96 \rightarrow 4x = 92 \rightarrow x = 23$$

Los números son 23 y 25.