

1. (8.25p) Resuelve las siguientes ecuaciones e inecuaciones (en el caso de las inecuaciones se deberá de dar las tres soluciones: gráfica, intervalo y desigualdad):

a. $2(x + 3) - (10 - x^2) = (x - 4)^2$

b. $(2x + 4)(2x - 4) + (2x - 4)^2 = 0$

c. $\frac{3x - 2}{5} - \frac{3(x + 1)}{10} - \frac{3 - x}{4} = \frac{1}{10}$

d. $\frac{(x - 3)^2}{2} + x^2 = 2x - (x - 2)$

e. $9x^2 - 12x = -4$

f. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

g. $2x(x^2 + 9)(x - 9)(3x^2 - 9) = 0$

h. $\sqrt{6x + 7} - 3x = 2$

i. $\frac{x}{2} = 1 + \frac{2x - 4}{x + 4}$

j. $2 - \frac{1 - 3x^2}{6} \geq \frac{(x - 3)(x + 2)}{2}$

k. $\begin{cases} -x \leq \frac{3}{2} \\ x - \frac{x}{4} < \frac{x + 1}{6} + 1 \end{cases}$

SOLUCIONES

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $2(x + 3) - (10 - x^2) = (x - 4)^2$

$$2x + 6 - 10 + x^2 = x^2 - 8x + 16$$

$$2x + 8x = 16 - 6 + 10$$

$$10x = 20$$

$$x = \frac{20}{10} = 2$$

b. $(2x + 4)(2x - 4) + (2x - 4)^2 = 0$

$$4x^2 - 16 + 4x^2 - 16x + 16$$

$$4x^2 - 16 + 4x^2 - 16x + 16 = 0$$

$$8x^2 - 16x = 0$$

$$x(8x - 16) = 0 \rightarrow$$

$$x_1 = 0$$

$$8x - 16 = 0 \rightarrow 8x = 16 \rightarrow x_2 = 2$$

c. $\frac{3x - 2}{5} - \frac{3(x + 1)}{10} - \frac{3 - x}{4} = \frac{1}{10}$

$$\frac{3x - 2}{5} - \frac{3x + 3}{10} - \frac{3 - x}{4} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{12x - 8 - 6x - 6 - 15 + 5x}{20} = \frac{2}{20}$$

$$12x - 8 - 6x - 6 - 15 + 5x = 2$$

$$12x - 6x + 5x = 2 + 8 + 6 + 15$$

$$11x = 31$$

$$x = \frac{31}{11}$$

$$d. \frac{(x-3)^2}{2} + x^2 = 2x - (x-2)$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{2} + x^2 = 2x - x + 2$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9 + 2x^2}{2} = \frac{4x - 2x + 4}{2}$$

$$x^2 - 6x + 9 + 2x^2 = 4x - 2x + 4$$

$$3x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{8 \pm 2}{6} =$$

$$x_1 = \frac{8+2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$x_2 = \frac{8-2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$e. 9x^2 - 12x = -4$$

$$9x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{2 \cdot 9} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{18} = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{18} =$$

$$\frac{12 \pm 0}{18} = \frac{2}{3}$$

$$f. x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

Realizamos el cambio de variable $x^2 = t$:

$$t^2 - 5t - 36 = 0$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2}$$

$$t_1 = \frac{5+13}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$t_2 = \frac{5-13}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\text{Para } t_1 = 9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\text{Para } t_2 = -4 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4} = \nexists$$

$$g. \quad 2x(x^2 + 9)(x - 9)(3x^2 - 9) = 0$$

Igualamos cada uno de los factores a cero:

$$2x = 0 \rightarrow x = \frac{0}{2} = 0$$

$$x^2 + 9 = 0 \rightarrow x^2 = -9 \rightarrow x = \pm\sqrt{-9} = \nexists$$

$$x - 9 = 0 \rightarrow x = 9$$

$$3x^2 - 9 = 0 \rightarrow 3x^2 = 9 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$h. \quad \sqrt{6x+7} - 3x = 2$$

$$\sqrt{6x+7} = 3x + 2$$

$$(\sqrt{6x+7})^2 = (3x+2)^2$$

$$6x + 7 = 9x^2 + 12x + 4$$

$$9x^2 + 6x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-3)}}{2 \cdot 9} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 108}}{18} =$$

$$\frac{-6 \pm \sqrt{144}}{18} = \frac{-6 \pm 12}{18}$$

$$x_1 = \frac{-6 + 12}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-6 - 12}{18} = \frac{-18}{18} = -1$$

(No se pedía comprobar las soluciones)

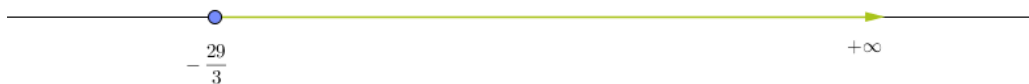
$$\begin{aligned}
 i. \quad \frac{x}{2} &= 1 + \frac{2x-4}{x+4} \\
 \frac{x(x+4)}{2(x+4)} &= \frac{2(x+4) + 2(2x-4)}{2(x+4)} \\
 x^2 + 4x &= 2x + 8 + 4x - 8 \\
 x^2 - 2x &= 0 \\
 x(x-2) &= 0 \\
 x_1 &= 0 \\
 x - 2 &\rightarrow x_2 = 2
 \end{aligned}$$

$$j. \quad 2 - \frac{1-3x^2}{6} \geq \frac{(x-3)(x+2)}{2}$$

Resolvemos la ecuación resultante de sustituir la desigualdad por una igualdad:

$$\begin{aligned}
 2 - \frac{1-3x^2}{6} &= \frac{x^2+2x-3x-6}{2} \\
 \frac{24-2+6x^2}{12} &= \frac{6x^2+12x-18x-36}{12} \\
 6x^2-6x^2-12x+18x &= -36-24+2 \\
 6x &= -58 \\
 x &= -\frac{58}{6} = -\frac{29}{3}
 \end{aligned}$$

Situamos el valor sobre la recta real y probamos un valor de uno de los intervalos, por ejemplo, $x = 0$ en la inecuación dada (no será necesario probar un valor en el otro intervalo por ser una inecuación de primer grado sin raíces dobles):



$$\text{¿ } 2 - \frac{1}{6} \geq \frac{(-3) \cdot 2}{2} ?$$

$$\text{¿ } \frac{11}{6} \geq -3 ?$$

Verdadero, luego la solución gráfica es la dada en la imagen y la solución en forma de intervalo es $[-29/3, +\infty)$

$$k. \begin{cases} -x \leq \frac{3}{2} \\ x - \frac{x}{4} < \frac{x+1}{6} + 1 \end{cases}$$

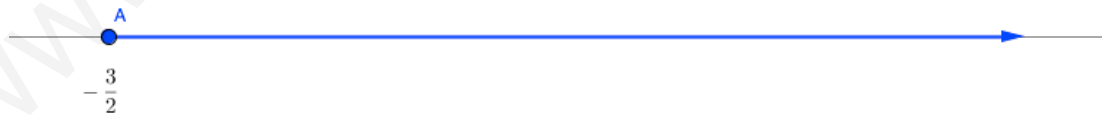
Obtenemos la solución gráfica de cada una de las inecuaciones:

1ª INECUACIÓN:

Resolvemos la ecuación resultante de sustituir la desigualdad por una igualdad:

$$-x = \frac{3}{2} \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Situamos el valor sobre la recta real y probamos un valor de uno de los intervalos, por ejemplo, $x = 0$ en la inecuación dada:



$$\text{¿ } -0 \leq \frac{3}{2} ?$$

$$\text{¿ } 0 \leq \frac{3}{2} ? \rightarrow \text{verdadero}$$

2ª INECUACIÓN:

Resolvemos la ecuación resultante de sustituir la desigualdad por una igualdad:

$$\begin{aligned}x - \frac{x}{4} &= \frac{x+1}{6} + 1 \\ \frac{12x - 3x}{12} &= \frac{2x + 2 + 12}{12} \\ 12x - 3x - 2x &= 2 + 12 \\ 7x &= 14 \\ x &= 2\end{aligned}$$

Situamos el valor sobre la recta real y probamos un valor de uno de los intervalos, por ejemplo, $x = 0$ en la inecuación dada:



$$¿0 < \frac{1}{6} + 1? \rightarrow \text{verdadero}$$

Dibujamos ambas soluciones en un único gráfico:



Luego las soluciones pedidas son:

$$x \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$-\frac{3}{2} \leq x < 2$$