

1. (0.75p) Comprueba si $x = 2$ es solución o no de las siguientes ecuaciones:

a. $3^{1-x} = \frac{1}{x^2 - 1}$

b. $\sqrt[3]{2 - 5x} = -x$

c. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = -\frac{1}{9}$

2. (6p) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\frac{x+2}{2} - \frac{x+3}{3} = \frac{2(x+5)}{9}$

b. $2(x+3) - (10 - x^2) = (x-4)^2$

c. $\frac{(x-3)^2}{2} + x^2 = 2x - (x-2)$

d. $x^3 - 81x = 0$

e. $6x^3 - x^2 - 10x - 3 = 0$

f. $\frac{x}{3} - 1 + \frac{1}{x} = 1 - \frac{2}{3x}$

3. (1.25p) Factoriza el polinomio $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$

4. (1p) El cristal rectangular de una ventana mide 10 cm más de alto que de ancho y su superficie mide 3.575 cm². Calcula cuánto miden los lados del cristal.

5. (1p) Si un número aumenta un 10% resulta 42 unidades mayor que si disminuye en un 5%. ¿De qué número se trata?

SOLUCIONES

1. Comprueba si $x = 2$ es solución o no de las siguientes ecuaciones:

a. $3^{1-x} = \frac{1}{x^2 - 1}$

$$3^{1-2} = \frac{1}{2^2 - 1}$$

$$3^{-1} = \frac{1}{4 - 1}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{SÍ}$$

b. $\sqrt[3]{2 - 5x} = -x$

$$\sqrt[3]{2 - 5 \cdot 2} = -2$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

$$-2 = -2 \rightarrow \text{SÍ}$$

c. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = -\frac{1}{9}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = -\frac{1}{9}$$

$$(3)^2 = -\frac{1}{9}$$

$$9 = -\frac{1}{9} \rightarrow \text{NO}$$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\frac{x+2}{2} - \frac{x+3}{3} = \frac{2(x+5)}{9}$

$$\frac{x+2}{2} - \frac{x+3}{3} = \frac{2x+10}{9}$$

$$\frac{9x+18}{18} - \frac{6x+18}{18} = \frac{4x+20}{18}$$

$$9x+18-6x-18=4x+20$$

$$9x-6x-4x=20$$

$$-x=20 \rightarrow x=-20$$

b. $2(x + 3) - (10 - x^2) = (x - 4)^2$

$$2x + 6 - 10 + x^2 = x^2 - 8x + 16$$

$$2x + 8x = 16 - 6 + 10$$

$$10x = 20$$

$$x = \frac{20}{10} = 2$$

c. $\frac{(x - 3)^2}{2} + x^2 = 2x - (x - 2)$

$$\frac{(x - 3)(x - 3)}{2} + x^2 = 2x - (x - 2)$$

$$\frac{x^2 - 3x - 3x + 9}{2} + x^2 = 2x - x + 2$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9 + 2x^2}{2} = \frac{4x - 2x + 4}{2}$$

$$x^2 - 6x + 9 + 2x^2 = 4x - 2x + 4$$

$$3x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{8 \pm 2}{6} =$$

$$x_1 = \frac{8 + 2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$x_2 = \frac{8 - 2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

d. $x^3 - 81x = 0$

Se saca factor común:

$$x(x^2 - 81) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 81 = 0 \end{cases}$$

Se resuelve la ecuación incompleta de segundo grado resultante:

$$x^2 - 81 = 0 \rightarrow x^2 = 81 \rightarrow x = \pm\sqrt{81} = \pm 9$$

Soluciones: $x = \{0, -9, 9\}$

e. $6x^3 - x^2 - 10x - 3 = 0$

Resolvemos la ecuación de tercer grado aplicando Ruffini:

	6	-1	-10	-3
-1		-6	7	3
	6	-7	-3	0

Luego $x_1 = -1$

Obtenemos las otras dos raíces resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$6x^2 - 7x - 3 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3)}}{2 \cdot 6} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{7 \pm 11}{12} =$$

$$x_2 = \frac{7 + 11}{12} = \frac{18}{12} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$x_3 = \frac{7 - 11}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

Soluciones: $x = \left\{-1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$

f. $\frac{x}{3} - 1 + \frac{1}{x} = 1 - \frac{2}{3x}$

$$\frac{x^2 - 3x + 3}{3x} = \frac{3x - 2}{3x}$$

$$x^2 - 3x + 3 = 3x - 2$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} =$$

$$x_1 = \frac{6 + 4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{6 - 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

3. Factoriza el polinomio $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$

Se resuelve la ecuación $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$

Se saca factor común:

$$x(x^3 - 2x^2 - x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \end{cases}$$

Resolvemos la ecuación de tercer grado resultante aplicando Ruffini:

	1	-2	-1	2
1		1	-1	-2
	1	-1	-2	0

Luego $x_2 = 1$

Obtenemos las otras dos raíces resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} =$$

$$x_3 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_4 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Luego:

Raíz	Factor
0	x
1	$x - 1$
2	$x - 2$
-1	$x + 1$

El polinomio factorizado es:

$$x(x-1)(x-2)(x+1)$$

4. El cristal rectangular de una ventana mide 10 cm más de alto que de ancho y su superficie mide 3.575 cm². Calcula cuánto miden los lados del cristal.

Las dimensiones de la ventana son:

Ancho: x

Alto: $x + 10$

Dado que el área del cristal es el ancho por el alto:

$$x \cdot (x + 10) = 3575$$

$$x^2 + 10x - 3575 = 0$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3575)}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 14300}}{2} =$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{14400}}{2} = \frac{-10 \pm 120}{2} =$$

$$x_1 = \frac{-10 + 120}{2} = \frac{110}{2} = 55$$

$$x_2 = \frac{-10 - 120}{2} = \frac{-130}{2} = -65 \text{ (No válida)}$$

Ancho: 55 cm

Alto: 65 cm

5. Si un número aumenta un 10% resulta 42 unidades mayor que si disminuye en un 5%.

¿De qué número se trata?

Sea el número buscado x . Si aumenta un 10%, el número obtenido será $1,10x$ y si disminuye un 5%, $0,95x$. Sumando 42 unidades al menor de ellos se obtiene al mayor:

$$1,10x = 0,95x + 42$$

$$1,10x - 0,95x = 42$$

$$x = \frac{42}{0,15} = 280$$