PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2001

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a los ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido de una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

OPCIÓN A

1º) Determinar la ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos O(0, 0) y A(1, 1) es igual a 9. Si se trata de una curva cerrada, calcular el área que encierra.

Sea P(x, y) el punto genérico del lugar geométrico pedido. Según el enunciado del problema tiene que cumplirse que:

$$\overline{OP}^2+\overline{AP}^2=9 \Rightarrow \left(\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\right)^2=9 \;;;$$

$$x^2+y^2+(x-1)^2+(y-1)^2=9 \;;;\; x^2+y^2+x^2-2x+1+y^2-2y+1=9 \;;;$$

$$\underline{\underline{2x^2+2y^2-2x-2y-7=0}}$$

El lugar geométrico es una circunferencia.

El centro y el radio de la circunferencia hallada son los siguientes:

$$x^2+y^2-x-y-\frac{7}{2}=0 \Rightarrow \begin{cases} A=-2a=-1 \rightarrow a=\frac{1}{2} \\ \\ B=-2b=-1 \rightarrow b=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \underline{O'\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)}.$$

$$C = a^2 + b^2 - r^2 \to r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{7}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{7}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{7}{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \underline{2 = r}\ .$$

Sabiendo que el área del círculo es $S_c = \pi r^2$, sería:

$$\underline{\underline{S_c = \pi \cdot 2^2 = 4\pi\ u^2}}$$

****

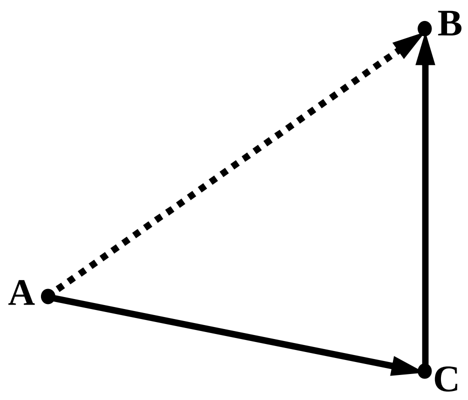
2º) Sean A, B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la siguiente relación: $\overrightarrow{CB} = -3 \cdot \overrightarrow{CA}$. Se pide:

a) Calcular el valor de k en la expresión $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.

b) Si A(1, 2, -1) y B(3, 6, 9), hallar las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.

----

a)



$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \;\;;;\;\; \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{CB} = -3 \cdot \overrightarrow{CA} \\ \\ \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -3 \cdot \overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 3 \cdot \overrightarrow{AC} \;\;;;\;\; \overrightarrow{AB} = 4 \cdot \overrightarrow{AC} \;\;;;$$

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB} \;\;;;\;\; \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{k = \frac{1}{4}}}$$

b)

Para A(1, 2, -1) y B(3, 6, 9) y un valor de $k = \frac{1}{4}$, siendo C(x, y, z), sería:

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB} \;\;;;\;\; 4 \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \;\;;;\;\; 4 \cdot (x-1,\; y-2,\; z+1) = (3,\; 6,\; 9) - (1,\; 2,\; -1) \;\;;;$$

$$(4x-4,\; 4y-8,\; 4z+4) = (2,\; 4,\; 10) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x - 4 = 2 \;\;;;\;\; 4x = 6 \rightarrow x = \frac{3}{2} \\ \\ 4y - 8 = 4 \;\;;;\;\; 4y = 12 \rightarrow y = 3 \\ \\ 4z + 4 = 10 \;\;;;\;\; 4z = 6 \rightarrow z = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{C\left(\frac{3}{2},\; 3,\; \frac{3}{2}\right)}}$$

****

3º) Se consideran las funciones $f(x)=x^2-2x+3$ y $g(x)=ax^2+b$.

a) Calcular a y b para que las gráficas de f y g sean tangentes para x = 2.

b) Para los valores de a y b calculados en el apartado anterior, dibujar las gráfica de ambas funciones y hallar la ecuación de la recta tangente común.

c) Para los mismos valores de a y b, hallar el área limitada por las gráficas de ambas funciones y el eje vertical.

----

a)

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-2x+3 \;;;\; f'(x)=2x-2 \rightarrow f'(2)=2\cdot 2-2=4-2=\underline{2=f'(2)} \\ g(x)=ax^2+b \;;;\; g'(x)=2ax \rightarrow g'(2)=2a\cdot 2=\underline{4a=g'(2)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(2)=g'(2) \Rightarrow 2=4a \;;;\; \underline{\underline{a=\frac{1}{2}}}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=2^2-2\cdot 2+3=4-4+3=\underline{3=f(2)} \\ g(x)=ax^2+b \;;;\; g(2)=\frac{1}{2}\cdot 2^2+b=\underline{2+b=g(2)} \end{array}\right\} \Rightarrow f(2)=g(2) \Rightarrow 3=2+b \;;;\; \underline{\underline{b=1}}$$

b)

$$f(x)=x^2-2x+3 \;\; y \;\; g(x)=\frac{1}{2}x^2+1$$

Se trata de dos parábolas convexas cuyos mínimos absolutos son los siguientes:

$$f'(x)=2x-2=0 \;;;\; x=1 \;;;\; f(1)=1^2-2\cdot 1+3=1-2+3=2 \Rightarrow Mín. \Rightarrow \underline{P(1,\ 2)}$$

$$g'(x)=x=0 \;;;\; g(0)=1 \Rightarrow Mín. \Rightarrow \underline{Q(0,\ 1)}$$

Los puntos de corte de ambas parábolas son.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2-2x+3=\frac{1}{2}x^2+1 \;;;\; 2x^2-4x+6=x^2+2 \;;;\; x^2-4x+4=0 \;;;$$

$$(x-2)^2=0 \;;;\; x=2 \rightarrow f(2)=g(2)=2^2-2\cdot 2+3=3 \Rightarrow Único\ \ punto\ \ de\ \ corte: \underline{A(2,\ 3)}$$

Por tener los mínimos absolutos de ambas parábolas ordenadas positivas, ninguna de las parábolas corta al eje de abscisas.

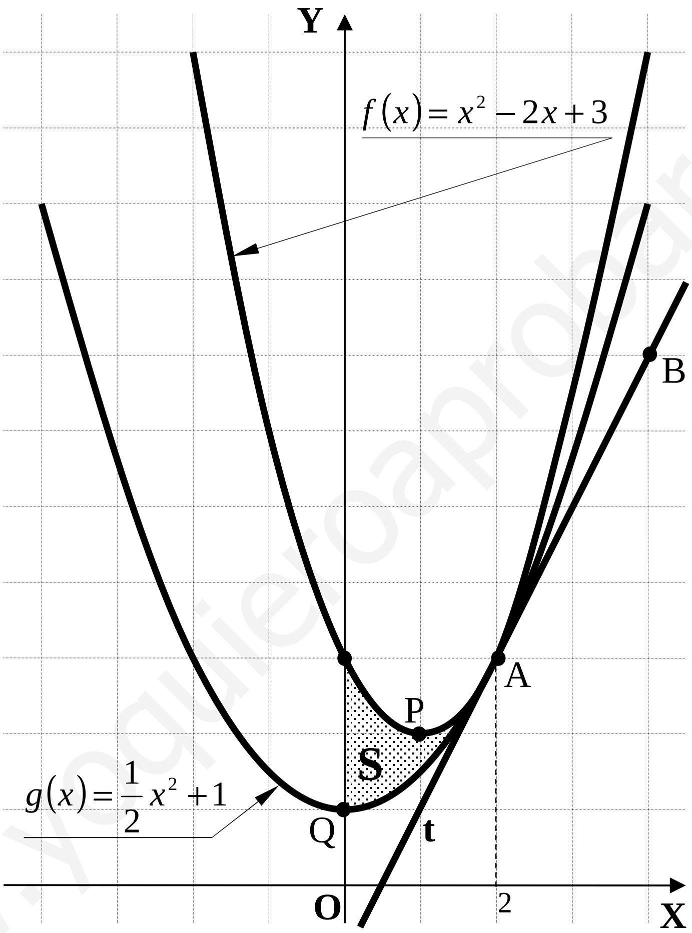
La ecuación de la recta t, tangente a ambas curvas en el punto A(2, 3) tiene la pendiente siguiente:

$$f'(x) = 2x - 2 \;;\; m = f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 4 - 2 = \underline{2 = m}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 2) = 2x - 4 \;;\; \underline{\underline{t \equiv 2x - y - 1 = 0}}$$

Para representar la recta t tendremos en cuenta que pasa por el punto B(4, 7).

La representación gráfica de la situación es la siguiente:



c)

Como puede observarse por la gráfica, las ordenadas de las parábolas correspondientes a la zona del área pedida, son mayores las de la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$ que las de $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$, por lo cual el área es la siguiente:

$$S = \int_0^2 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^2 \left[(x^2 - 2x + 3) - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 \right) \right] dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{2x^2}{2} + 2x \right]_0^2 = \left[\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x \right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{6} - 2^2 + 2 \cdot 2 \right) - 0 = \frac{8}{6} - 4 + 4 = \underline{\underline{\frac{4}{3}\, u^2 = S}}$$

****

4º) Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax+y+4z=1 \\ -x+ay-2z=1 \\ y+z=a \end{cases}$:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

b) Resolver el sistema para a = 2. c) Resolver el sistema para a = 1.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & 4 \\ -1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} a & 1 & 4 & 1 \\ -1 & a & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 1 & 4 \\ -1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2-4+2a+1=a^2+2a-3=0$$

$$a=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1=1} \\ \underline{a_2=-3} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq 1 \\ a\neq -3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 3 = n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Determinado}}$$

Veamos el rango de M' para los valores hallados anteriormente:

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2=C_4\} \Rightarrow \underline{Rango\ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 2 < n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Indeterminado}}$$

$$Para\ a=-3 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ de\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -27-1+3-3=-28\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=-3\ \Rightarrow\ Rango\ \ M\neq Rango\ \ M'\ \Rightarrow\ Incompatible}}$$

b)

Resolvemos para a = 2 (C. D.). Es sistema resulta $\begin{cases} 2x+y+4z=1 \\ -x+2y-2z=1 \\ y+z=2 \end{cases}$.

Aplicamos la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{2+4-4-16+2-1}{4-4+4+1}=\underline{\underline{\frac{-13}{5}=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{5}=\frac{2-8+8+1}{5}=\underline{\underline{\frac{3}{5}=y}} \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{5}=\frac{8-1-2+2}{5}=\underline{\underline{\frac{7}{5}=z}}$$

c)

Resolvemos para a = 1 (C. I.). Es sistema resulta $\begin{cases} x+y+4z=1 \\ -x+y-2z=1 \\ y+z=1 \end{cases}$.

Despreciamos una de las ecuaciones y parametrizamos una de las incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+4z=1 \\ y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \underline{y=1-\lambda}\ ;;\ x=1-y-4\lambda=1-1+\lambda-4\lambda=\underline{-3\lambda=x}$$

$$\underline{\underline{Solución:\begin{cases} x=-3\lambda \\ y=1-\lambda, \quad \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Sea la función $f(t)=\frac{1}{1+e^t}$.

a) Calcular $\int f(t)dt$.

b) Se define $g(x)=\int_0^x f(t)dt$. Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$.

----

a)

$$\int f(t)dt=\int\frac{1}{1+e^t}dt=\int\frac{1+e^t-e^t}{1+e^t}dt=\int\frac{1+e^t}{1+e^t}dt-\int\frac{e^t}{1+e^t}dt=\int 1dt-\int\frac{e^t}{1+e^t}dt=$$

$$=\underline{t-I=\int f(t)dt}\qquad (*)$$

$$I=\int\frac{e^t}{1+e^t}dt\ \Rightarrow\ \begin{Bmatrix}1+e^t=z\\ e^t\,dt=dz\end{Bmatrix}\ \Rightarrow\ I=\int\frac{1}{z}dz=L\,z+C=\underline{L\left(1+e^t\right)+C=I}$$

Sustituyendo el valor obtenido en la expresión (*), queda:

$$\underline{\underline{\int f(t)dt=t-L\left(1+e^t\right)+C}}$$

b)

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt=\left[t-L\left(1+e^t\right)\right]_0^x=\left[x-L\left(1+e^x\right)\right]-\left[0-L\left(1+e^0\right)\right]=x-L\left(1+e^x\right)-L\,2=$$

$$=\underline{x-L\frac{1+e^x}{2}=g(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-L\frac{1+e^x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-L\left(1+e^x\right)+L\,2}{x}=\frac{0-L\,2+L\,2}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind..\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (L'Hopital)\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{e^x}{1+e^x}+0}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{1+e^0}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

****

2º) Sea P(x) un polinomio de cuarto grado tal que: $\begin{cases} P(x) \ \ es \ \ una \ \ función \ \ par. \\ Dos \ \ raíces \ \ son \ \ x=1 \ \ y \ \ x=-\sqrt{5} \\ P(0)=5 \end{cases}$. Se pide:

a) Hallar sus puntos de inflexión.

b) Dibujar su gráfica.

----

a)

Por ser una función par tiene que ser de la forma $P(x)=ax^4+bx^2+c$.

$P(0)=5 \Rightarrow \underline{c=5}$.

$P(1)=0 \Rightarrow \underline{a+b+5=0}$. (1)

$P(-\sqrt{5})=0 \Rightarrow a \cdot (-\sqrt{5})^4+b \cdot (-\sqrt{5})^2+5=0 \ ;; \ 25a+5b+5=0 \ ;; \ \underline{5a+b+1=0}$. (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a+b+5=0 \\ 5a+b+1=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -a-b-5=0 \\ 5a+b+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4a-4=0 \ ;; \ a-1=0 \ ;; \ \underline{a=1} \ ;; \ 1+b+5=0 \ :: \ \underline{b=-6}.$$

El polinomio resulta ser $\underline{\underline{P(x)=x^4-6x^2+5}}$. Los puntos de inflexión son:

$P'(x)=4x^3-12x \ ;; \ P''(x)=12x^2-12 \ ;; \ P'''(x)=24x$.

$P''(x)=0 \Rightarrow 12x^2-12=0 \ ;; \ x^2-1=0 \ ;; \ x^2=1 \ ;; \ \underline{x_1=-1} \ ;; \ \underline{x_2=1}$.

$$\left.\begin{array}{l} P'''(-1)=-24 \neq 0 \\ \\ P'''(1)=24 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P. \ I. \ para \ \ x=-1 \ \ y \ \ x=1}.$$

$P(-1)=P(1)=1-6+5=0$.

$$\underline{\underline{P.I \Rightarrow A(-1, \ 0) \ ;; \ B(1, \ 0)}}$$

b)

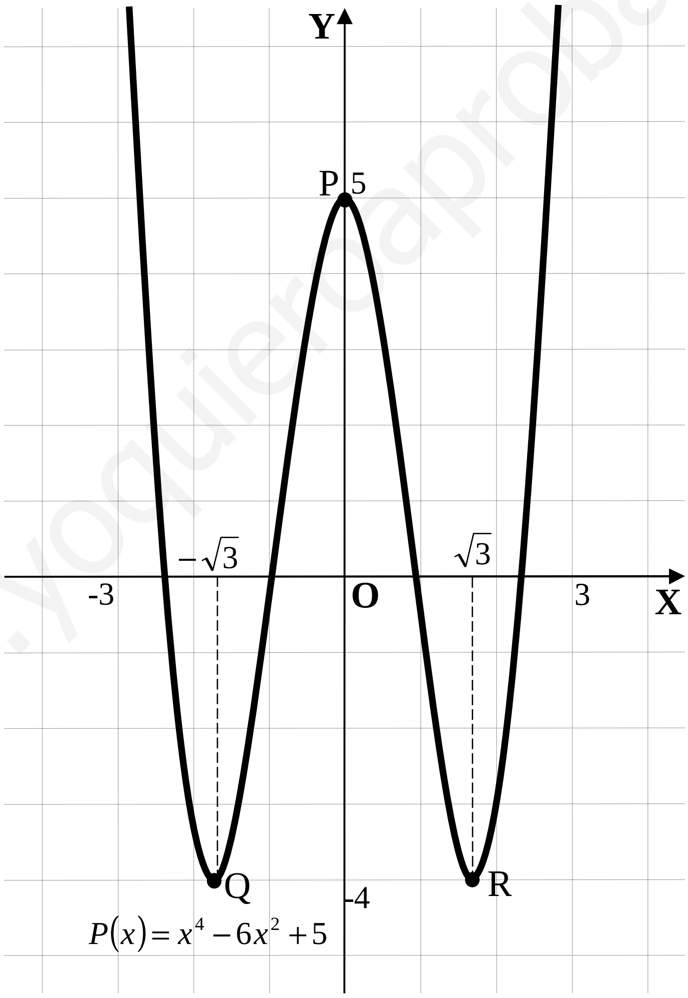
Para dibujar su gráfica con mayor precisión vamos a determinar los máximos y mínimos.

$P'(x)=0 \Rightarrow 4x^3-12x=0 \ ;; \ 4x(x^2-3)=0 \Rightarrow \underline{x_1=0} \ ;; \ \underline{x_2=-\sqrt{3}} \ ;; \ \underline{x_3=\sqrt{3}}$.

$$P''(x)=12x^2-12 \Rightarrow \begin{cases} P''(0)=-12<0 \Rightarrow \underline{\textit{Máximo relativo para } x=0} \\ P''(-\sqrt{3})=36-12>0 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo relativo para } x=-\sqrt{3}} \\ P''(\sqrt{3})=36-12>0 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo relativo para } x=\sqrt{3}} \end{cases}.$$

$$P(x)=x^4-6x^2+5 \Rightarrow \begin{cases} P(0)=5 \Rightarrow \textit{Máx.} \Rightarrow \underline{P(0,\ 5)} \\ P(-\sqrt{3})=9-18+5=-4 \Rightarrow \textit{Mín.} \Rightarrow \underline{Q(-\sqrt{3},\ -4)} \\ P(\sqrt{3})=9-18+5=-4 \Rightarrow \textit{Mín.} \Rightarrow \underline{R(\sqrt{3},\ -4)} \end{cases}.$$

La representación gráfica es, aproximadamente, la siguiente:



****

3º) Se considera el tetraedro de vértices A(1, 0, 0), B(1, 1, 1), C(-2, 1, 1) y D(0, 1, 3).

a) Hallar el área del triángulo ABC y el volumen del tetraedro ABCD.

b) Calcular la distancia de D al plano determinado por los puntos A, B y C.

c) Hallar la distancia entre las rectas AC y BD.

----

a)

Los vectores que determinan el triángulo ABC son:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 1,\ 1) - (1,\ 0,\ 0) = \underline{(0,\ 1,\ 1)}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1,\ 1,\ 1) - (1,\ 0,\ 0) = \underline{(-2,\ 1,\ 1)}$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Conviene saber que el área del paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan, por lo tanto:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |\, i + -2j + 2k - i \,| = \frac{1}{2} \cdot |-2j + 2k| = |\, j + k \,| =$$

$$= \sqrt{1^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}\ u^2 = S_{ABC}}}$$

El volumen del tetraedro es, en valor absoluto, un sexto del volumen del paralelepípedo cuyas dimensiones determinan los tres vectores

Los vectores que determinan los cuatro puntos son los siguientes:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (0,\ 1,\ 1)\ ;;\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = (-2,\ 1,\ 1)$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD} = D - A = (0,\ 1,\ 3) - (1,\ 0,\ 0) = (-1,\ 1,\ 3)$$

El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que determinan sus dimensiones:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \right) \right] \right| = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot |-2 - 1 + 1 + 6| = \frac{1}{6} \cdot |4| = \underline{\underline{\frac{2}{3}\ u^3 = V_{ABCD}}}$$

b)

El plano π que determinan los puntos A, B y C puede determinarse por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y por cualquiera de los puntos, por ejemplo, el A:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ (x-1) - 2y + 2z - (x-1) = 0 \ ;;\ \underline{\pi \equiv y - z = 0}$$

La distancia de un punto a una recta es: $d(P,\ \pi) = \dfrac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, que aplicada al punto D(0, 1, 3) y al plano $\pi \equiv y - z = 0$ es:

$$d(D,\ \pi) = \frac{|\ 0\cdot 0 + 1\cdot 1 - 1\cdot 3 + 0\ |}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|1-3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2}\ u = d(D,\ \pi)}}$$

c)

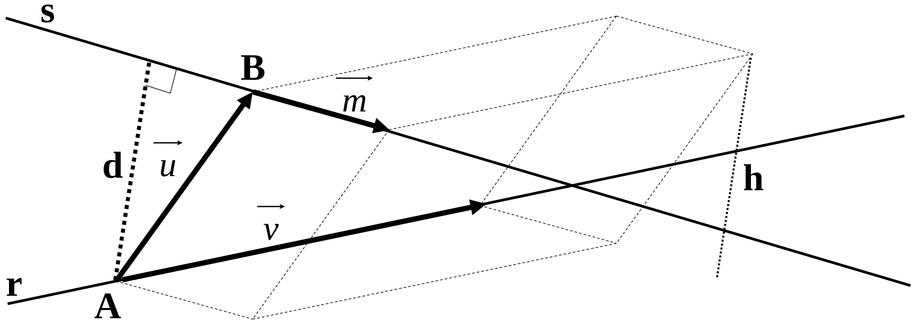
La recta $r \equiv \overline{AC}$ se determina por su vector director $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = (-2,\ 1,\ 1)$ y, por ejemplo, el punto A(1, 0, 0): $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

La recta $s \equiv \overline{BD}$ se determina por el vector $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{BD}$ y, por ejemplo, por el punto D(0, 1, 3).

$$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{BD} = D - B = (0,\ 1,\ 3) - (1,\ 1,\ 1) = (-1,\ 0,\ 2) \ ;;\ s \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas r y s son linealmente independientes, lo cual significa que las rectas se cortan o se cruzan. Según el apartado b), al formar un tetraedro, las rectas se cruzan.

Se entiende como distancia entre dos rectas que se cruzan, a la menor distancia entre ambas.



Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación, que es el adjunto.

Un punto de la recta r es A y un punto de la recta s es B.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{m}\right) = \left|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{m}\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{m}\right| \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left|\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{m}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{m}\right|}$$

$$d(r,\ s) = \frac{\left|\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{m}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{m}\right|} = \frac{\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{matrix} \right\|}{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{matrix} \right\|} = \frac{|-1+1+4|}{|2i - j + k + 4j|} = \frac{4}{|2i + 3j + k|} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{14}}{14} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{14}}{7}\ u = d(r,\ s)}}$$

****

4º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Comprobar que se verifica la igualdad $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.

b) Justificar que A tiene inversa y obtener A^{-1}.

c) Calcular A^{100}.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3-4 & 0-12+12 & 0-15+16 \\ 0-4+5 & 3+16-15 & 4+20-20 \\ -0+3-4 & -3-12+12 & -4-15+16 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = A^2}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0+0-1 & -3-0+3 & -4-0+4 \\ 0+4-4 & 3-16+12 & 4-20+16 \\ -0-3+3 & -3+12-9 & -4+15-12 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A^3}$$

$$A^3 + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;;;\; \underline{\underline{A^3 + I = O,\ c.q.c.}}$$

b)

Para que A tenga inversa, su determinante tiene que ser distinto de cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 12+15-16-12 = -1 \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{La\ \ matriz\ \ A\ \ es\ \ inversible,\ \ c.q.j.}}$$

Para obtener la matriz inversa de A vamos a proceder por el Método de Gauss-Jordan:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_2 \\ F_3 \rightarrow F_3 + F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow \tfrac{1}{3}F_2\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 + 4F_2 \\ F_3 \rightarrow F_3 + F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 - F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 - 4F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow 3F_3\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \quad \underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}}}$$

c)

Para calcular A^{100} tendremos en cuenta que $A^3 + I = O$.

$$A^3 = O - I = -I \ ;; \ (A^3)^{33} = (-I)^{33} \ ;; \ A^{99} = -I^{33} = -I$$

$$A^{99} \cdot A = -I^{33} \cdot A \ ;; \ A^{100} = -I \cdot A$$

$$\underline{\underline{A^{100} = -A}}$$

****