PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2002

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.

OPCIÓN A

1º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

a) Determinar sus máximos y mínimos relativos.

b) Calcular el valor de a > 0 para el cual se verifica la igualdad $\int_0^a f(x)\cdot dx=1$.

----

a)

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\underline{\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=f'(x)}$$

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot[2\cdot(x^2+1)\cdot 2x]}{(x^2+1)^4}=\frac{-2x\cdot(x^2+1)-4x\cdot(1-x^2)}{(x^2+1)^3}=$$

$$=\frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^3}=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}=\underline{\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=f''(x)}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0\ ;;\ 1-x^2=0\ ;;\ \underline{x_1=1}\ ;;\ \underline{x_2=-1}$$

$$f''(1)=\frac{2\cdot1\cdot(1^2-3)}{(1^2+1)^3}=\frac{2\cdot(-2)}{4}=\frac{-4}{4}=-1<0\ \Rightarrow\ \underline{\textit{Máximo relativo para } x=1}$$

$$f(1)=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\textit{Máx.}\Rightarrow P\left(1,\ \frac{1}{2}\right)}}$$

$$f''(-1)=\frac{2\cdot(-1)\cdot\left[(-1)^2-3\right]}{\left[(-1)^3+1\right]^2}=\frac{-2\cdot(-2)}{4}=\frac{4}{4}=1>0 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Mínimo relativo para } x=-1}$$

$$f(-1)=\frac{-1}{(-1)^2+1}=\frac{-1}{2} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Mín.} \Rightarrow Q\left(-1,\,-\frac{1}{2}\right)}}$$

b)

$$\int_0^a f(x)\cdot dx=1 \;\Rightarrow\; \int_0^a \frac{x}{x^2+1}\cdot dx=1 \;;;\; \left\{\begin{matrix} x^2+1=t \\ x\,dx=\frac{1}{2}dt \end{matrix}\right\| \begin{matrix} \rightarrow x=a \rightarrow t=a^2+1 \\ \rightarrow x=0 \rightarrow t=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int_1^{a^2+1}\frac{1}{t}\cdot dt=1 \;;;\; [L\,t]_1^{a^2+1}=2 \;;;\; L\left(a^2+1\right)-L1=2 \;;;\; L\left(a^2+1\right)-0=2 \;;;\; a^2+1=e^2 \;;;$$

$$a^2=e^2-1 \;;;\; a=\pm\sqrt{e^2-1} \;;;;\; (a>0) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{a=+\sqrt{e^2-1}}}$$

****

2º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & si \quad x \geq 2 \\ x(x-2) & si \quad x<2 \end{cases}$.

a) Estudiar su continuidad y su derivabilidad.

b) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto A(3, 1).

----

a)

Para que la función sea derivable en x = 2 es condición necesaria que la función sea continua para x = 2:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{x-2} = \underline{0} = \underline{f(2)} \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} [x(x-2)] = \underline{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)}$$

<u>La función es continua para x = 2.</u>

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

La derivada por la izquierda es

$$f(x)=\sqrt[3]{x-2}=(x-2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} \Rightarrow \underline{f'(2^-)=+\infty}$$

La derivada por la derecha es:

$$f(x)=x(x-2)=x^2-2x \Rightarrow f'(x)=2x-2 \Rightarrow \underline{f'(2^+)=2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=+\infty \\ f'(2^+)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-) \neq f'(2^+) \Rightarrow \underline{\underline{La \ \ función \ \ no \ \ es \ \ derivable \ \ para \ \ x=2}}$$

b)

$$m = f'(3) \Rightarrow f'(3)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(3-2)^2}}=\underline{\frac{1}{3}=m}$$

$$y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-1=\frac{1}{3}(x-3) \ ;; \ 3y-3=x-3 \ ;; \ \underline{\underline{Tangente: \ t \equiv x-3y=0}}$$

****

3º) Se considera el sistema $\begin{cases} x+y+\lambda z=\lambda^2 \\ y-z=\lambda \\ x+\lambda y+z=\lambda \end{cases}$, dependiente del parámetro λ. Se pide:

a) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.

b) Resolver el sistema en los casos en que sea posible.

c) En el caso de $\lambda=2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix}=1-1-\lambda+\lambda=0 \Rightarrow \underline{|M|=0,\ \forall\lambda\in R}$$

Vamos a estudiar el rango de M':

$$\{C_1,\ C_2,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix}=\lambda\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix}=\lambda(1+1-\lambda-\lambda)=\lambda(2-2\lambda)\Rightarrow\begin{cases} \underline{\lambda_1=0} \\ \underline{\lambda_2=1} \end{cases}$$

$$\{C_1,\ C_3,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & -1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda\cdot\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\lambda(-1+\lambda+\lambda-1)=\lambda(2\lambda-2)\Rightarrow\begin{cases} \underline{\lambda_1=0} \\ \underline{\lambda_2=1} \end{cases}$$

$$\{C_2,\ C_3,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda\cdot\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}=\lambda(-1+\lambda+\lambda^2+\lambda^2-1-\lambda)=$$

$$=\lambda(2\lambda^2-2)=2\lambda(\lambda^2-1)\Rightarrow\begin{cases} \underline{\lambda_1=0} \\ \underline{\lambda_2=1} \\ \underline{\lambda_3=-1} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\mathit{Para}\ \begin{Bmatrix} \lambda\neq 0 \\ \lambda\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathit{Rango}\ M=2\neq \mathit{Rango}\ M'=3 \Rightarrow \mathit{Incompatible}}}$$

$$Para \left\{ \begin{matrix} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 2 \;\Rightarrow\; Compatible \;\; Indeterminado$$

b)

Resolvemos en los casos posibles, o sea, para $\lambda = 0 \;\; y \;\; \lambda = 1$:

$$\lambda = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \underline{z = \mu} \;;;\; \underline{x = -\mu} \;;;\; \underline{y = \mu} \;\;\Rightarrow\;\; Solución: \begin{cases} x = -\mu \\ y = \mu \;\;, \;\; \forall \mu \in R \\ z = \mu \end{cases}$$

$$\lambda = 1 \;\;\Rightarrow\;\; \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \;;;\; \left. \begin{matrix} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{z = \rho} \;;;\; \underline{y = 1 + \rho} \;;;\; x + y + z = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \;\; x + 1 + \rho + \rho = 1 \;;;\; \underline{x = -2\rho} \;\;\Rightarrow\; Solución: \begin{cases} x = -2\rho \\ y = 1 + \upsilon, \;\; \forall \rho \in R \\ z = \rho \end{cases}$$

.c)

Para $\lambda = 2$ a = 2 resulta el sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ y - z = 2 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$ que, como se detalla en el apartado a) es incompatible y, como no hay planos paralelos, los planos se cortan dos a dos determinando tres rectas paralelas.

****

4º) Se consideran las rectas $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2}$ y $s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

a) Calcular la distancia entre r y s.

b) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta p perpendicular común a r y a s y que corta a ambas.

c) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta t que corta a r y s y que pasa por el punto P(1, 0, 0).

----

a)

Vamos a resolver este apartado mediante los vectores directores de ambas rectas.

Un vector director de r es $\overrightarrow{u} = (1,\ -2,\ 2)$ y un director de s es $\overrightarrow{v} = (3,\ 1,\ -1)$.

Como puede observarse, los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son linealmente independientes, lo cual significa que las rectas se cruzan o se cortan; para diferenciar el caso determinamos un tercer vector $\overrightarrow{w}$ que tenga como origen, por ejemplo, un punto de r, A(0, 1, 3) y por extremo otro punto de s, B(2, 0, -1): $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ 0,\ -1) - (0,\ 1,\ 3) = (2,\ -1,\ -4)$.

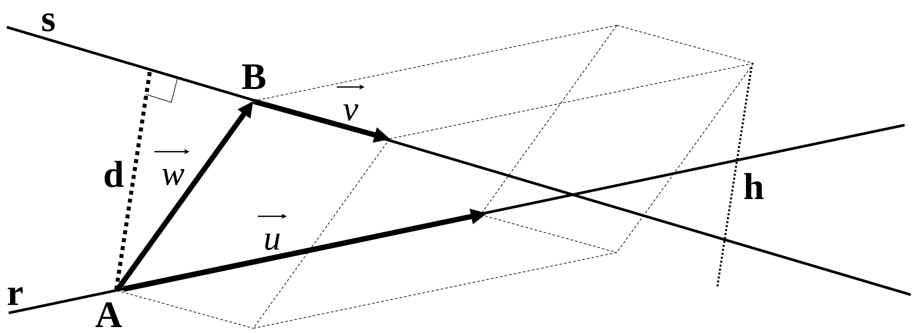
Si los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ están en el mismo plano las rectas r y s se cortan; en caso contrario se cruzan, o sea, si el rango de $\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\}$ es 2 las rectas se cortan y si el rango es 3 se cruzan:

$$Rang\ \{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -4-6+4-4-1-24 = 4-39 \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{Rango = 3}}$$

En efecto, las rectas r y s se cruzan en el espacio.

Se entiende como distancia entre dos rectas que se cruzan, a la menor distancia entre ambas.

Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación.



Para calcular la distancia entre las rectas vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas y otro vector que tiene como origen un punto A de la recta r y como final otro punto B de la recta s, tal como se observa en la figura.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

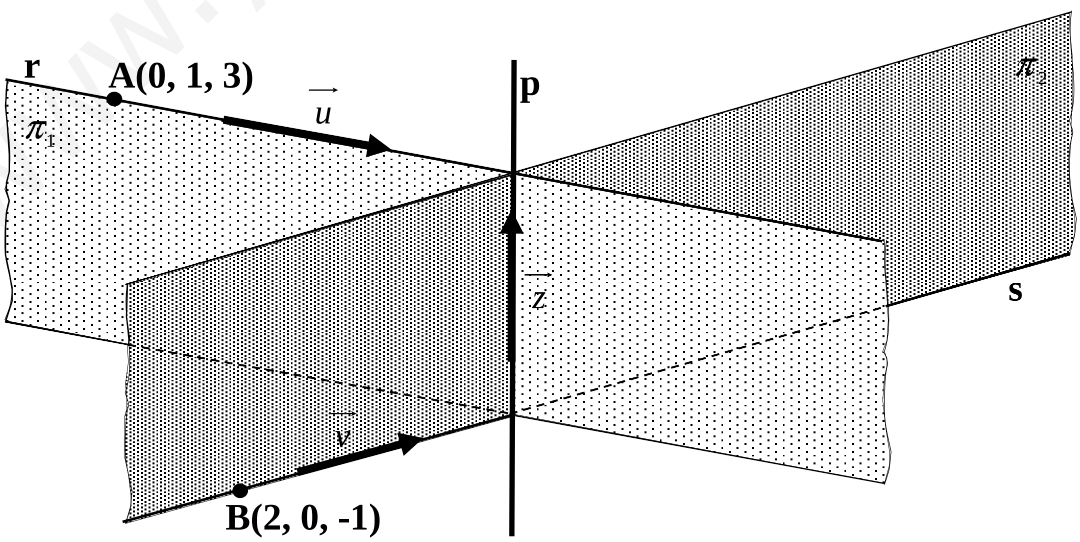
$$V = \overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \right) = \left| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \right| \cdot h = \left| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \right| \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left| \overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \right) \right|}{\left| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \right|}$$

$$d(r,\ s) = \frac{\left| \overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \right) \right|}{\left| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \right|} = \frac{\left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{matrix} \right\|}{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{matrix} \right\|} = \frac{|-4-6+4-4-1-24|}{|2i+6j+k+6k-2i+j|} = \frac{|4-39|}{|7j+7k|} =$$

$$= \frac{35}{7 \cdot |j+k|} = \frac{5}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{2}}{2}\ u = d(r,\ s)}}$$

b)

Para hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta p perpendicular común a r y a s y que corta a ambas hacemos es esquema aclaratorio siguiente.



Como puede apreciarse, la recta p pedida es la intersección de los planos π_1 y π_2

siendo π_1 el plano determinado por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{z}$ y el punto A(0, 1, 3), donde el vector $\overrightarrow{z}$ es perpendicular al mismo tiempo de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, que puede ser cualquier vector linealmente dependiente del producto vectorial de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

Del apartado anterior sabemos que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = 7j + 7k = (0,\ 7,\ 7)$, por lo cual podemos tomar como vector perpendicular común a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ al vector $\overrightarrow{z} = (0,\ 1,\ 1)$.

$$\pi_1\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{z}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -2x + (z-3) - 2x - (y-1) = 0 \ ;;$$

$$-4x + z - 3 - y + 1 = 0 \ ;;\ \underline{\pi_1 \equiv 4x + y - z - 2 = 0}$$

El plano π_2 se determina por los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{z}$ y el punto B(2, 0, -1):

$$\pi_2\left(B;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{z}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ (x-2) + 3(z+1) + (x-2) - 3y = 0 \ ;;$$

$$2(x-2) + 3(z+1) - 3y = 0 \ ;;\ 2x - 4 + 3z + 3 - 3y = 0 \ ;;\ \underline{\pi_2 \equiv 2x - 3y + 3z - 1 = 0}$$

La recta pedida p es: $\underline{\underline{p \equiv \begin{cases} 4x + y - z - 2 = 0 \\ 2x - 3y + 3z - 1 = 0 \end{cases}}}$

Expresada por unas ecuaciones paramétricas sería:

$$p \equiv \begin{cases} 4x + y - z - 2 = 0 \\ 2x - 3y + 3z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x + y = 2 + \lambda \\ 2x - 3y = 1 - 3\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4x + y = 2 + \lambda \\ -4x + 6y = -2 + 6\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 7y = 7\lambda \ ;;\ \underline{y = \lambda} \ ;;\ 4x + y = 2 + \lambda \ ;;\ 4x + \lambda = 2 + \lambda \ ;;\ \underline{x = \frac{1}{2}} \Rightarrow \underline{\underline{p \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

c)

La recta t que corta a r y s y que pasa por el punto P(1, 0, 0) puede obtenerse como intersección de los planos α y β, siendo el plano α el determinado por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{AP}$ y el punto P y el plano β determinado por los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{BP}$ y el punto P.

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (1,\ 0,\ 0) - (0,\ 1,\ 3) = (1,\ -1,\ -3)$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (1,\ 0,\ 0) - (2,\ 0,\ -1) = (-1,\ 0,\ 1)$$

$$\alpha\left(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{AP}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 6(x-1) + 2y - z + 2z + 2(x-1) + 3y = 0\ ;;$$

$$8(x-1) + 5y + z = 0\ ;;\ 8x - 8 + 5y + z = 0\ ;;\ \underline{\alpha \equiv 8x + 5y + z - 8 = 0}$$

$$\beta\left(P;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{BP}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ (x-1) + y + z - 3y = 0\ ;;\ \underline{\beta \equiv x - 2y + z - 1 = 0}$$

La ecuación de t por unas ecuaciones cartesianas es la siguiente.

$$\underline{\underline{t \equiv \begin{cases} 8x + 5y + z - 8 = 0 \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Hallar una ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos A(0, 3) y B(0, -1) es igual a 1. Identificar dicho lugar geométrico.

Por definición, al lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, que se llaman focos, es constante e igual al eje real, se denomina hipérbola, por lo tanto:

El lugar geométrico que tratamos es una hipérbola de focos A y B.

Siendo P(x, y) un punto genérico de la hipérbola, los radios vectores serían:

$$r = \overline{AP} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6y + 9}$$

$$r' = \overline{BP} = \sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1}$$

$$r - r' = 2a = 1 \Rightarrow r - r' = \sqrt{x^2 + y^2 - 6y + 9} - \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} = 1 \;;;$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 6y + 9} = 1 - \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} \;;;$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} + x^2 + y^2 + 2y + 1 \;;;$$

$$7 - 8y = -2\sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} \;;;\; 2\sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} = 8y - 7 \;;;$$

$$4\left(x^2 + y^2 + 2y + 1\right) = 64y^2 - 112y + 49 \;;;\; 4x^2 + 4y^2 + 8y + 4 = 64y^2 - 112y + 49 \;;;$$

$$\underline{\underline{4x^2 - 60y^2 + 120y - 45 = 0}}$$

****

2º) Sean los planos $\pi_1 \equiv x+y+az=-2,\ \pi_2 \equiv x+ay+z=-1\ \ y\ \ \pi_3 \equiv ax+y+z=3$, para cada valor del parámetro a, se pide:

a) Calcular los valores del parámetro a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.

b) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

----

a)

Para que tres planos tengan una recta en común es necesario que el sistema que determinan sea compatible indeterminado, de tal manera que los rangos de la matriz de coeficientes y ampliada tengan ambas rango dos.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}\ ;;\ M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & a & -2\\ 1 & a & 1 & -1\\ a & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}=a+a+a-a^3-1-1=-a^3+3a-2=0\ ;;\ a^3-3a+2=0.$$

Resolviendo por Ruffini:

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	$\boxed{0}$
1		1	2	
	1	2	$\boxed{0}$	
-2		-2		
	1	$\boxed{0}$		

Las soluciones son $a_1=1\ \ y\ \ a_2=-2$.

$$Para\ \ a=1 \Rightarrow M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ M=1 \Rightarrow \underline{a=1\ \ no\ \ es\ \ solución}.$$

Para a = -2 el rango de M es dos. Veamos cual es el rango de M’:

$$Para\ \ a = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M' = 2} \quad \{F_1 + F_2 = -F_3\}$$

<u>Los tres planos se cortan en una recta para a = -2.</u>

b)

Para determinar la recta por unas ecuaciones cartesianas o implícitas, basta con tomar las ecuaciones de dos ecuaciones cualesquiera de entre las de los tres planos, por ejemplo:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z = -2 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

****

3º) Sea A una matriz real cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n, se pide:

a) Expresar A^{-1} en términos de A.

b) Expresar A^n en términos de A e I, para cualquier número natural n.

c) Calcular a para que $A^2 = I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

----

a)

$$\left.\begin{array}{l} A^2 = A \cdot A = I \\ A \cdot A^{-1} = I \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} = A}}$$

b)

$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A \cdot A = A \cdot A \cdot A^{-1} = A \cdot I = \underline{A = A^3}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = \underline{I = A^4}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = \underline{A = A^5}$$

$$\underline{\underline{A^n = \begin{cases} A & si \ \ n \ \ impar \\ I & si \ \ n \ \ par \end{cases}}}$$

c)

$$A^2 = I \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \;;;\; A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = I \;;;\; \begin{pmatrix} 1+0 & 1+a \\ 0+0 & 0+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 1+a=0 \\ a^2 = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{a = -1}}$$

****

4º) Sea f(x) una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que: f(0) = 1, f(1) = 2, f'(0) = 3 y f'(1) = 4. Se pide:

a) Calcular g'(0), siendo $g(x) = f[x + f(0)]$.

b) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{2[f(x)]^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$.

----

a)

$$g(x) = f[x + f(0)] = f(x+1)$$

$$g'(x) = f'(x+1) \Rightarrow g'(0) = f'(0+1) = f'(1) = \underline{\underline{4 = g'(0)}}$$

c)

$$\lim_{x \to 0} \frac{2[f(x)]^2 - f(x+1)}{e^x - 1} = \frac{2[f(0)]^2 - f(0+1)}{e^0 - 1} = \frac{2 \cdot 1^2 - 2}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow L'Hopitl \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{4 \cdot f(x) \cdot f'(x) - f'(x+1)}{e^x} = \frac{4 \cdot f(0) \cdot f'(0) - f'(1)}{e^0} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 3 - 4}{1} = 12 - 4 = \underline{\underline{8}}$$

****