PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2006

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.

REPERTORIO A

1º) Dado el sistema homogéneo: $\begin{cases} x+ky-z=0 \\ kx-y+z=0 \\ (k+1)x+y=0 \end{cases}$, averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de x = y = z = 0. Resolverlo en tales casos.

Todos los sistemas homogéneos son compatibles por admitir todos la solución trivial de ser cero todas sus incógnitas; sin embargo, algunos son compatibles indeterminados por admitir, además de la solución trivial, infinitos grupos de soluciones.

Teniendo en cuenta el Teorema de Rouché-Fröbenius, para que un sistema sea compatible indeterminado, la matriz de coeficientes (en este caso la matriz ampliada es equivalente a la matriz de coeficientes) tiene un rango menor que el número de ecuaciones y de incógnitas, por lo cual, para que el sistema considerado tenga soluciones diferentes a x = y = z = 0 es necesario que el determinante de la matriz de coeficientes sea cero.

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -k+k(k+1)-(k+1)-1=-k+k^2+k-k-1-1=k^2-k-2=0$$

$$k=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{k_1=2}} \;;;\; \underline{\underline{k_2=-1}}$$

$$Para\ \ k=2\ \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 3x+y=0 \end{cases}.$$

Despreciando una de las ecuaciones (tercera) y parametrizando una de las incógnitas (z), resulta:

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=\lambda \\ 2x-y=-\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+2y=\lambda \\ 4x-2y=-2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 5x=-\lambda\ ;;\ \underline{x=-\frac{1}{5}\lambda}$$

$$2x-y=-\lambda\ ;;\ y=2x+\lambda=-\frac{2}{5}\lambda+\lambda=\underline{\frac{3}{5}\lambda=y}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=-\frac{1}{5}\lambda \\ y=\frac{3}{5}\lambda \qquad \forall \lambda \in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

$$Para\ \ k=-1\ \Rightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ -x-y+z=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

Despreciando una de las ecuaciones (segunda) y parametrizando una de las incógnitas (z), resulta:

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \underline{x=\lambda}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \quad \forall \lambda \in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

2º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar todas las matrices $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumplan que A · P = P · A.

$$A \cdot P = P \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\; ;; \;\; \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+2c = a \rightarrow \underline{c=0} \\ \\ b+2d = 2a+b \rightarrow \underline{a=d} \\ \\ d = 2c+d \rightarrow \underline{c=0} \end{array} \right\}$$

Las matrices pedidas son de la forma: $\underline{\underline{M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \; \forall a, b \in R}}$

****

3º) a) Dibujar la gráfica de la función $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

b) Demostrar que la sucesión $a_n=\frac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.

c) Calcular $\underset{n\to\infty}{lím}\left[n^2\left(a_{n+1}-a_n\right)\right]$.

----

a)

El dominio de una función racional es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x+1=0\ \Rightarrow\ x=-1\ \ \Rightarrow\ \ D(f)\Rightarrow R-\{-1\}$$

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, derivamos:

$$f'(x)=\frac{2\cdot(x+1)-2x\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x}{(x+1)^2}=\underline{\frac{2}{(x+1)^2}=f'(x)}$$

Por ser $f'(x)>0,\ \forall x\in R$, la función es creciente en su dominio.

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\underset{x\to\infty}{lím}f(x)=\underset{x\to\infty}{lím}\frac{2x}{x+1}=\underline{2=y}$$

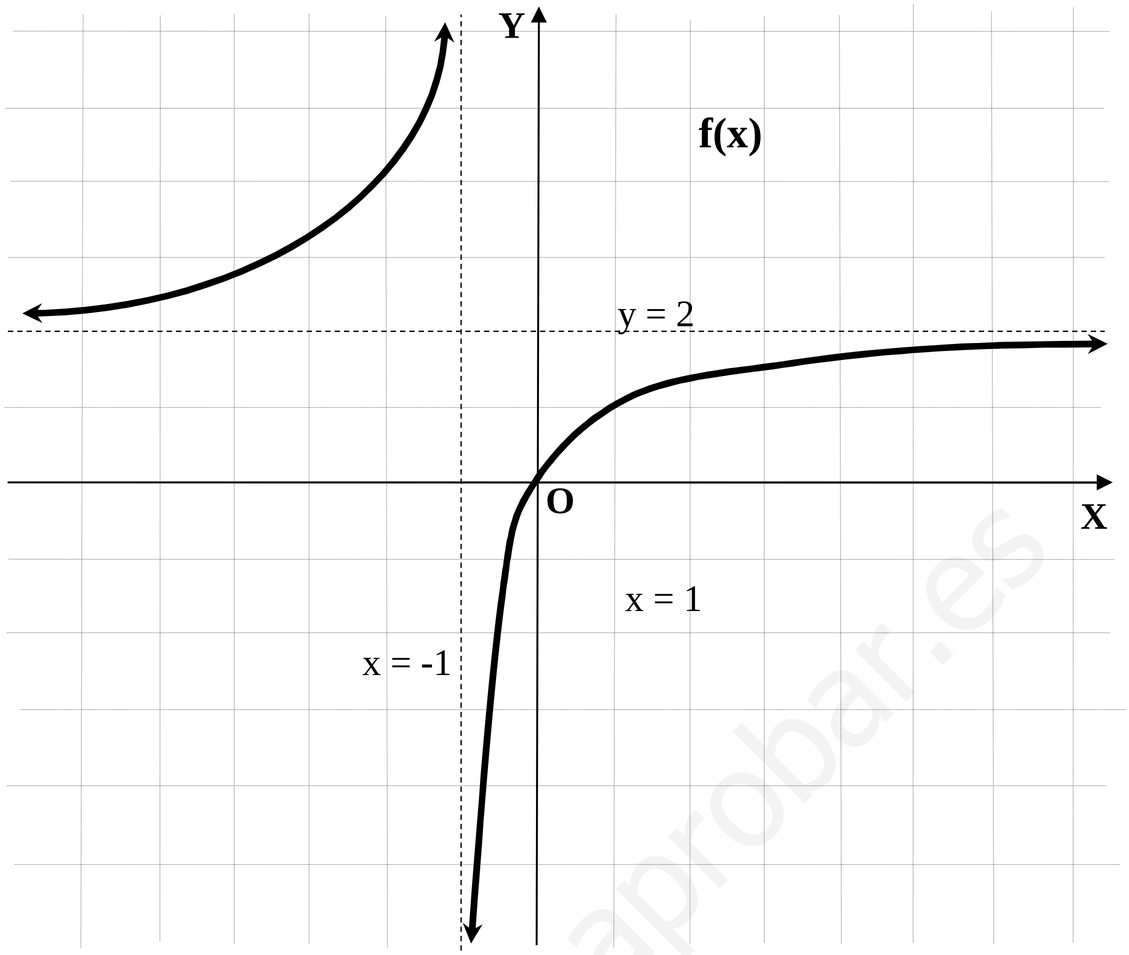
Verticales: son los valores de x que anulan el denominador:

$$x+1=0\ ;;\ \underline{x=-1}$$

Oblicuas: No tiene

(Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

Con los datos obtenidos anteriormente y teniendo en cuenta que la función pasa por el origen de coordenadas, puede hacerse, aproximadamente, un gráfico de la función, que es el siguiente:



b)

Para demostrar que la sucesión $a_n = \frac{2n}{n+1}$ es monótona creciente, basta con demostrar que $a_{n+1} - a_n < 0$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)}{(n+1)+1} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2n^2+2n+2n+2-2n^2-4n}{(n+2)(n+1)} = \underline{\frac{2}{(n+2)(n+1)}}$$

$$\underline{\underline{a_{n+1} - a_n > 0,\ \ \forall n \in N,\ \ c.q.d.}}$$

c)

Teniendo en cuenta el apartado anterior, sería:

$$\lim_{n \to \infty} \left[n^2 \left(a_{n+1} - a_n\right)\right] = \lim_{n \to \infty} \left[n^2 \cdot \frac{2}{(n+2)(n+1)}\right] = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^2}{n^2+3n+2} = \underline{\underline{2}}.$$

****

4º) Sean las rectas $r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4}$ y $s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$:

a) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen de coordenadas y corta a las rectas anteriores.

b) Hallar la recta p, perpendicular común a las rectas r y s.

----

a)

La recta t pedida es la intersección de los siguientes planos: π_1 que contiene a la recta r y pasa por el origen y π_2 que contiene a la recta s y pasa por el origen.

Un punto de la recta r es A(-1, 2, 0). El plano π_1 tiene como vectores directores al vector director de r, $\overrightarrow{v_r} = (-2,\ 2,\ -4)$ y al vector $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{OA} = (-1,\ 2,\ 0)$.

La ecuación general del plano π_1 es la siguiente:

$$\pi_1(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{u_r}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ -2 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 4(y-2) - 4z + 2z + 8(x+1) = 0 \ ;;$$

$$4y - 8 - 2z + 8x + 8 = 0 \ ;;\ 8x + 4y - 2z = 0 \ ;;\ \underline{\pi_1 \equiv 4x + 2y - z = 0}$$

Un punto de la recta r es A(-1, 2, 0). El plano π_1 tiene como vectores directores al vector director de r, $\overrightarrow{v_r} = (-2,\ 2,\ -4)$ y al vector $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{OA} = (-1,\ 2,\ 0)$.

De forma similar determinamos la ecuación general del plano π_2:

Un punto de la recta s es B(2, -1, -2). El plano π_2 tiene como vectores directores al vector director de s, $\overrightarrow{v_s} = (3,\ 1,\ 1)$ y al vector $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{OB} = (2,\ -1,\ -2)$.

$$\pi_2(B;\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{u_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \ ;;$$

$$-2(x-2) - 3(z+2) + 2(y+1) - 2(z+2) + (x-2) + 6(y+1) = 0 \ ;;$$

$$-(x-2) + 8(y+1) - 5(z+2) = 0 \ ;;\ -x + 2 + 8y + 8 - 5z - 10 = 0 \ ;;\ \underline{\pi_2 \equiv x - 8y + 5z = 0}$$

$$t \equiv \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$$

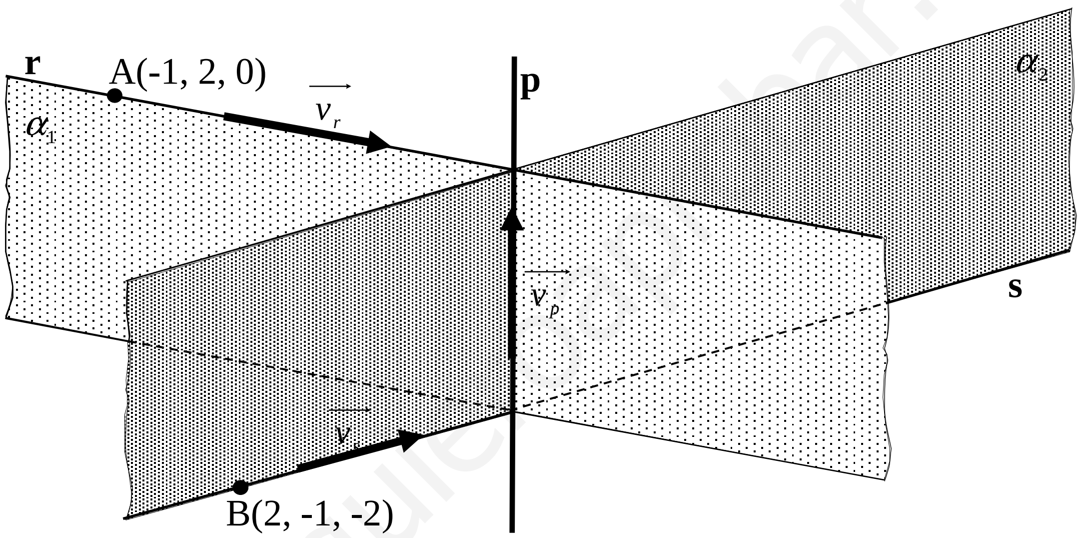
b)

La recta p perpendicular común a las rectas r y s tiene como vector director un vector que es, al mismo tiempo, perpendicular a las dos rectas; su vector director puede ser cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de las rectas r y s:

$$\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i - 12j - 2k - 6k + 4i + 2j = 6i - 10j - 8k =$$

$$= 2(3i - 5j - 4k) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w} = (3,\ -5,\ -4)}.$$

Para hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta p perpendicular común a r y a s y que corta a ambas hacemos es esquema aclaratorio siguiente.



Como puede apreciarse, la recta p pedida es la intersección de los planos α_1 y α_2 siendo α_1 el plano determinado por los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_p}$ y el punto A(-1, 2, 0):

$$\alpha_1\left(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_p}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 0 \ ;;$$

$$-8(x+1) - 12(y-2) + 10z - 6z - 20(x+1) - 8(y-2) = 0 \ ;; \ -28(x+1) - 20(y-2) + 4z = 0 \ ;;$$

$$7(x+1) + 5(y-2) - z = 0 \ ;; \ 7x + 7 + 5y - 10 - z = 0 \ ;; \ \underline{\alpha_1 \equiv 7x + 5y - z - 3 = 0}$$

El plano α_2 se determina por los vectores $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{v_p}$ y el punto B(2, -1, -2):

$$\alpha_2\left(B;\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{v_p}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 0 \ ;;$$

$$-4(x-2)+3(y+1)-15(z+2)-3(z+2)+5(x-2)+12(y+1)=0 \;\;;;$$

$$(x-2)+15(y+1)-18(z+2)=0 \;\;;;\;\; x-2+15y+15-18z-36=0 \;\;;;$$

$$\underline{\alpha_2 \equiv x+15y-18z-23=0}$$

La recta pedida p es: $p \equiv \begin{cases} 7x+5y-z-3=0 \\ x+15y-18z-23=0 \end{cases}$

Expresada por unas ecuaciones paramétricas sería:

$$p \equiv \begin{cases} 7x+5y-z-3=0 \\ x+15y-18z-23=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 7x+5y=3+\lambda \\ x+15y=23+18\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 21x+15y=9+3\lambda \\ -x-15y=-23-18\lambda \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \;\; 20x=-14-15\lambda \;\;;;\;\; \underline{x=-\frac{7}{10}-\frac{3}{4}\lambda} \;\;;;\;\; \left.\begin{array}{l} -7x-5y=-3-\lambda \\ 7x+105y=161+126\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 100y=158+125\lambda$$

$$\Rightarrow \underline{y=\frac{79}{50}+\frac{5}{4}\lambda}$$

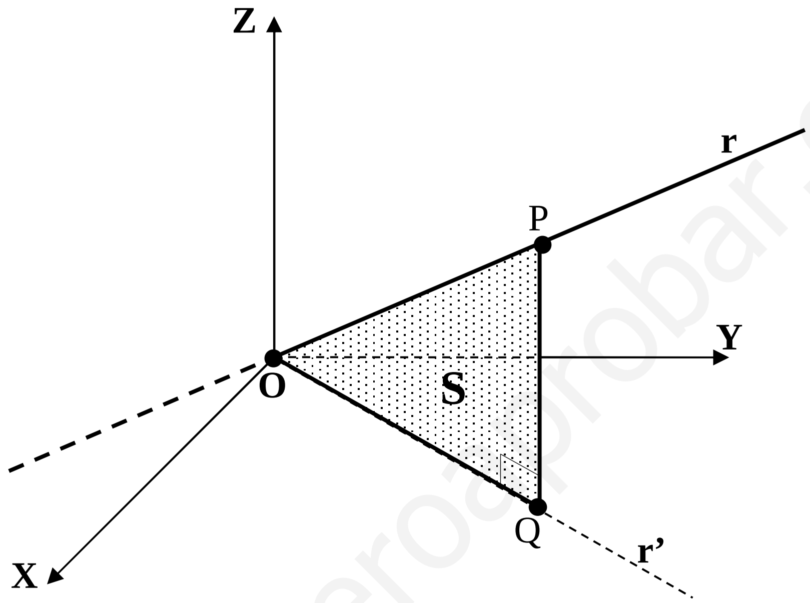
$$p \equiv \begin{cases} x=-\frac{7}{10}-\frac{3}{4}\lambda \\ y=\frac{79}{50}+\frac{5}{4}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

****

REPERTORIO B

1º) Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\overrightarrow{v} = (4,\ 3,\ 1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi \equiv z = 0$, el triángulo OPQ tenga área 1.

Para facilitar la comprensión del problema hacemos un dibujo esquemático de la situación, que puede ser el indicado en la figura adjunta.



La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y un punto cualquiera de ella es $P(4\lambda,\ 3\lambda,\ \lambda)$.

La proyección del punto P sobre el plano $\pi \equiv z = 0$ es el punto $Q(4\lambda,\ 3\lambda,\ 0)$.

El triángulo OPQ es rectángulo en Q. El área del triángulo es la mitad del producto de sus catetos, o sea: $S = \frac{\overline{OQ} \cdot \overline{QP}}{2}$.

Teniendo en cuenta que:

$$\overline{OQ} = \sqrt{(4\lambda)^2 + (3\lambda)^2 + 0^2} = \sqrt{16\lambda^2 + 9\lambda^2} = \sqrt{25\lambda^2} = \underline{\underline{5\lambda = \overline{OQ}}}$$

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (4\lambda,\ 3\lambda,\ \lambda) - (4\lambda,\ 3\lambda,\ \lambda) = (0,\ 0,\ \lambda) \Rightarrow \underline{\overline{QP} = \lambda}$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la fórmula de la superficie queda:

$$S=\frac{\overline{OQ}\cdot\overline{QP}}{2}=\frac{5\lambda\cdot\lambda}{2}=1\ ;;\ \lambda^2=\frac{2}{5}\ ;;\ \lambda=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\Rightarrow \underline{\lambda_1=\frac{\sqrt{10}}{5}}\ ;;\ \underline{\lambda_2=-\frac{\sqrt{10}}{5}}\ .$$

Los puntos que cumplen la condición pedida son:

$$\underline{\underline{P_1\left(\frac{4\sqrt{10}}{5},\ \frac{3\sqrt{10}}{5},\ \frac{\sqrt{10}}{5}\right)}}\ \ y\ \ \underline{\underline{P_2\left(-\frac{4\sqrt{10}}{5},\ -\frac{3\sqrt{10}}{5},\ -\frac{\sqrt{10}}{5}\right)}}$$

****

2º) Determinar la posición relativa de las rectas r y s cuyas ecuaciones son las siguientes: $r \equiv \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{4}$ y $s \equiv \begin{cases} x+2y-5z-5=0 \\ 2x+y+2z-4=0 \end{cases}$

La expresión de las rectas por unas ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$r \equiv \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{r \equiv \begin{cases} x = -4-3\lambda \\ y = 7+4\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+2y-5z-5=0 \\ 2x+y+2z-4=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y=5+5\lambda \\ 2x+y=4-2\lambda \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} -x-2y=-5-5\lambda \\ 4x+2y=8-4\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 3-9\lambda \;;;\; \underline{x = 1-3\lambda} \;;;$$

$$y = 4-2\lambda-2x = 4-2\lambda-2+6\lambda = \underline{2+4\lambda = y} \;\Rightarrow\; \underline{s \equiv \begin{cases} x = 1-3\lambda \\ y = 2+4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Vamos a realizar el estudio por los vectores directores de las rectas. En primer lugar expresamos la recta r_2 por unas ecuaciones paramétricas:

Un punto y un vector de cada una de las rectas son:

$$r \;\Rightarrow \left\{ \underline{\overrightarrow{u} = (-3,\ 4,\ 4)} \;;;\; \underline{A(-4,\ 7,\ 0)} \right\} \;;;\quad s \;\Rightarrow \left\{ \underline{\overrightarrow{v} = (-3,\ 4,\ 1)} \;::\; \underline{B(1,\ 2,\ 0)} \right\}$$

Es evidente que los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son linealmente independientes, ya que:

$\frac{-3}{-3} = \frac{4}{4} \neq \frac{4}{1}$. Esto significa que las rectas se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso determinamos el vector $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 2,\ 0) - (-4,\ 7,\ 0) = (5,\ -5,\ 0)$.

Si el rango de los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ es dos, entonces son coplanarios y las rectas se cortan; si el rango es tres las rectas se cruzan. Veamos:

$$Rango\ \left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 60+20-80-15 = -15 \neq 0$$

$$\underline{\underline{Rango\ \left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right\} = 3 \;\Rightarrow\; Las\ \ rectas\ \ r\ \ y\ \ s\ \ se\ \ cruzan}}$$

****

3º) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.

b) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para a = 2.

----

a)

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2a^3 - 2 + 2a + 2a - 2a = -2a^3 + 2a = -2a\left(a^2 - 1\right) =$$

$$= -2a(a-1)(a+1) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{a_1 = 0} \;;;\; \underline{a_2 = 1} \;;;\; \underline{a_3 = 0}$$

$$\underline{\underline{Para \;\begin{cases} a = 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{cases} \Rightarrow Rango \;\; M = 3}}$$

$$Para \;\; a = 0 \;\Rightarrow\; M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango \;\; 2}$$

$$Para \;\; a = 1 \;\Rightarrow\; M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango \;\; 2}$$

$$Para \;\; a = -1 \;\Rightarrow\; M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango \;\; 2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Para \;\begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow Rango \;\; M = 2}}$$

b)

Una matriz es inversible cuando el valor de su determinante es distinto de cero, por lo tanto:

$$\underline{\underline{Existe \;\; inversa \;\; de \;\; M \;\;\; \forall a \in R, \;\{a \neq 1, \;\; a \neq -1\}}}$$

Para a = 2 resulta $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $M^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $|M| = -2 \cdot 2\left(2^2 - 1\right) = -12$.

$$Adj\left(M^{T}\right)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}}}$$

****

4º) a) Estudiar y representar gráficamente la función $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$.

b) Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y=1,\ x=\frac{5}{2}$.

----

a)

El dominio de una función racional es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador. $D(f) \Rightarrow R-\{2\}$.

La función no corta al eje X por no existir f(x) = 0. Para x = 0, $f(0)=\frac{1}{4}$; corta al eje Y en el punto $A\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$.

Para estudiar los intervalos de crecimiento, así como los máximos y mínimos relativos calculamos sus derivadas primera y segunda:

$$f'(x)=\frac{-1\cdot 2(x-2)\cdot 1}{(x-2)^4}=\underline{\frac{-2}{(x-2)^3}=f'(x)}\ ;;\ f''(x)=\frac{2\cdot 3(x-2)^2\cdot 1}{(x-2)^6}=\underline{\frac{6}{(x-2)^4}=f''(x)}$$

$$x<0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \underline{Crecimiento:\ (-\infty,\ 2)}$$

$$x>0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento:\ (2,\ \infty)}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2}{(x-2)^3}=0 \Rightarrow x\notin R \Rightarrow \underline{No\ \ tiene\ \ máximos\ \ ni\ \ mínimos\ \ relativos.}$$

Las asíntotas de la función son las siguientes:

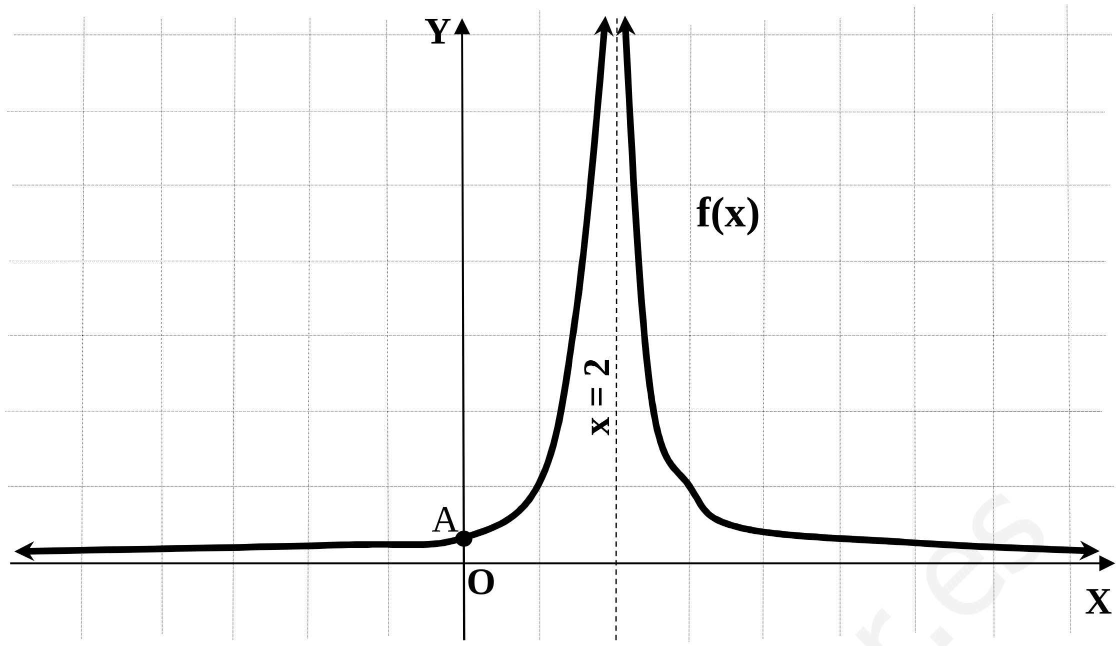
<u>Horizontales</u>: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x-2)^2}=0 \Rightarrow \underline{y=0\ \ (Eje\ \ X)}$$

<u>Verticales</u>: son los valores de x que anulan el denominador: $x-2=0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{x=2}}$

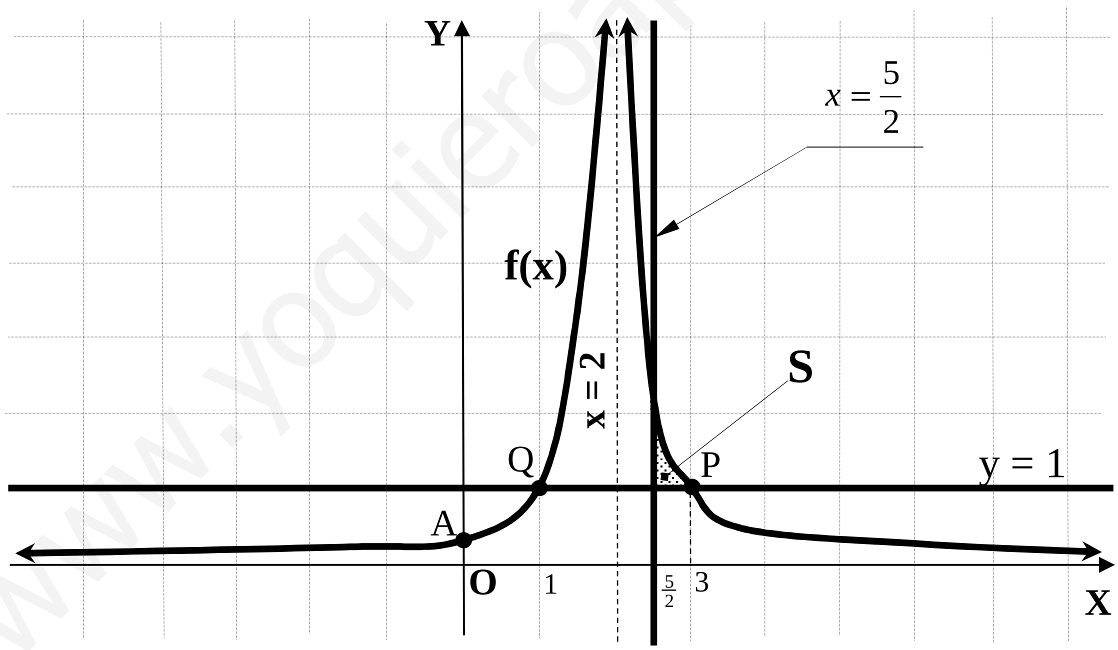
<u>Oblicuas</u>: Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador; en este caso <u>no tiene asíntotas oblicuas.</u>

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



b)

La representación gráfica de la situación es la que indica el gráfico siguiente.



Los puntos de corte de la curva con la recta y = 1 son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{(x-2)^2} = 1 \;;\; (x-2)^2 = 1 \;;\; x^2 - 4x + 4 = 1 \;;\; x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \rightarrow \underline{P(3,\ 1)} \\ x_2 = 1 \rightarrow \underline{Q(1,\ 1)} \end{cases}$$

$$S=\int_{\frac{5}{2}}^{3}[f(x)-1]dx=\int_{\frac{5}{2}}^{3}\left[\frac{1}{(x-2)^2}-1\right]dx=\int_{\frac{5}{2}}^{3}\frac{1}{(x-2)^2}\,dx-\int_{\frac{5}{2}}^{3}1\cdot dx=\int_{\frac{5}{2}}^{3}\frac{1}{(x-2)^2}\,dx+\int_{3}^{\frac{5}{2}}1\cdot dx=$$

$$=I_1+[x]_3^{\frac{5}{2}}=I_1+\left(\frac{5}{2}-3\right)=\underline{I_1-\frac{1}{2}=S\qquad(*)}$$

$$I_1=\int_{\frac{5}{2}}^{3}\frac{1}{(x-2)^2}\,dx\;\Rightarrow\;\left\{\begin{array}{c}x-2=t\\ \\ dx=dt\end{array}\right\|\left.\begin{array}{c}x=3\rightarrow t=1\\ x=\frac{5}{2}\rightarrow t=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\;\Rightarrow\;I_1=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t^2}\cdot dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{-2}\cdot dt=\left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=$$

$$=\left[-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\left(-\frac{1}{1}\right)-\left(-\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)=-1+2=\underline{1=I_1}$$

Sustituyendo el valor obtenido de I_1 en (*), resulta finalmente:

$$S=1-\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}\,u^2=S}}$$

****