

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE MADRID****JUNIO – 2007**

(Resueltos por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

El examen presenta dos opciones, A y B. Se deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

OPCIÓN A

1º) Estudiar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro m .

Restando la tercera fila a las otras dos, resulta: $A = \begin{pmatrix} 0 & m-2 & (m-1)^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & m-2 & (m-1)^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & m-2 \\ m & 1 \end{vmatrix} = -m(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Para } \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = 3$$

$$\text{Para } m = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Para } m = 0 \Rightarrow \text{Rango } A = 2.}}$$

$$\text{Para } m = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Para } m = 2 \Rightarrow \text{Rango } A = 2.}}$$

2º) Hallar una matriz X tal que $X \cdot A \cdot X^{-1} = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$.

Multiplicando por la derecha por X la expresión $X \cdot A \cdot X^{-1} = B$, resulta:

$$X \cdot A \cdot X^{-1} \cdot X = B \cdot X \quad ; ; \quad X \cdot A \cdot I = B \cdot X \quad ; ; \quad \underline{X \cdot A = B \cdot X}$$

Siendo $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y operando en la última expresión:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ; ; \quad \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-9c & 8b-9d \\ 6a-7c & 6b-7d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 8a - 9c \\ 2c = 6a - 7c \\ -b = 8b - 9d \\ -d = 6b - 7d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a = 9c \quad ; ; \quad \underline{2a = 3c} \\ 8b = 8d \quad ; ; \quad \underline{b = d} \end{cases} \Rightarrow \text{Por ejemplo, para } \begin{cases} a = 3 \\ c = 2 \\ b = 1 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Nota: El problema tiene infinitas soluciones, basta con que cumplan las relaciones encontradas entre sus elementos.

3º) Dados el plano $\pi \equiv x - 2y - 3z + 1 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $A(1, -2, -3)$, se pide:

a) Ecuación del plano α que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π .

b) Ecuación de la recta s que pasa por A, corta a r y es paralela a π .

a)

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$y = \lambda \quad ; \quad x = -1 - \lambda \quad \Rightarrow \quad r \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Un vector director de r es $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.

Un vector normal (perpendicular) al plano π es $\vec{n} = (1, -2, -3)$.

El plano α pedido tiene como vectores directores a \vec{v} y \vec{n} y contiene al punto $A(1, -2, -3)$:

$$\alpha(A; \vec{v}, \vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad -3(x-1) + 2(z+3) - (z+3) - 3(y+2) = 0 \quad ;$$

$$-3x + 3 + z + 3 - 3y - 6 = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{\alpha \equiv 3x + 3y - z = 0}}$$

b)

El haz de planos paralelos a π tiene por ecuación $\pi \equiv x - 2y - 3z + D = 0$ y de ellos el π' que contiene al punto A es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y - 3z + D = 0 \\ A(1, -2, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 4 + 9 + D = 0 \quad ; \quad D = -14 \Rightarrow \underline{\underline{\pi' \equiv x - 2y - 3z - 14 = 0}}$$

El punto P de intersección de π' con r es el siguiente:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 - \lambda - 2\lambda - 14 = 0 \ ; \ ; \ 3\lambda = -15 \ ; \ ; \ \lambda = -5 \Rightarrow \underline{P(4, -5, 0)}.$$

$$\pi' \equiv x - 2y - 3z - 14 = 0$$

La recta s pedida es la que pasa por los puntos A y P, cuyo vector director es cualquiera que sea linealmente dependiente al vector:

$$\vec{u}_1 = \vec{AP} = P - A = (4, -5, 0) - (1, -2, -3) = (3, -3, 3), \text{ por ejemplo: } \underline{\vec{u} = (1, -1, 1)}.$$

Considerando, por ejemplo, el punto $A(1, -2, -3)$, la recta s expresada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = -3 + \lambda \end{array} \right.$$

4º) Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.

a) Para cada valor de m hallar el valor de $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P[a, f(a)]$ pase por el origen de coordenadas.

b) Hallar el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.

a)

La recta que pasa por el punto $P[a, f(a)]$ y por el origen de coordenadas tiene como pendiente $m = \frac{f(a)}{a}$. Por otra parte, la recta tangente a una función en un punto tiene como pendiente la derivada de la función en ese punto:

$$f'(x) = 2x \Rightarrow x = a \Rightarrow m = 2a$$

$$\frac{f(a)}{a} = 2a \quad ; \quad \frac{a^2 + m}{a} = 2a \quad ; \quad a^2 + m = 2a^2 \quad ; \quad a^2 = m \quad ; \quad a = \pm\sqrt{m} \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \underline{a = \sqrt{m}}$$

$$\underline{\underline{a = +\sqrt{m} \quad \forall m \in (0, +\infty)}}$$

b)

En el caso particular de ser la recta tangente $y = x$, resulta que $m = 1$, por lo cual:

$$m = 2a = 1 \quad ; \quad \underline{a = \frac{1}{2}} \Rightarrow m = a^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4} = m}}$$

OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4}$, calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX.

Se trata de una función par, por lo cual es simétrica con respecto al eje Y.

Teniendo en cuenta que $x^2 + 4 > 0, \forall x \in R$, el dominio de la función es R y los valores de f(x) serán positivos o negativos cuando lo sean los valores de $x^2 - 12$.

Los puntos de corte de la función con el eje X son los siguientes:

$$\frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} = 0 \quad ; ; \quad x^2 - 12 = 0 \quad ; ; \quad x^2 = 12 \quad ; ; \quad x = \pm\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} \Rightarrow \underline{x_1 = -2\sqrt{3}} \quad ; ; \quad \underline{x_2 = 2\sqrt{3}}.$$

En el intervalo $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ los valores de la función son negativos, por lo que el área pedida es la siguiente: $S = -2 \cdot \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} \cdot dx = 2 \cdot \int_{2\sqrt{3}}^0 \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} \cdot dx$.

El valor de la integral indefinida es el siguiente:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} \cdot dx = \int \frac{x^2 + 16 - 16 - 12}{x^2 + 4} \cdot dx = \int \left(1 + \frac{-16}{x^2 + 4}\right) \cdot dx = \int dx - 16 \cdot \int \frac{1}{x^2 + 4} \cdot dx = \\ & x - 16 \cdot \int \frac{\frac{1}{4}}{\frac{x^2}{4} + 1} \cdot dx = x - 4 \cdot \int \frac{1}{\frac{x^2}{4} + 1} \cdot dx = \underline{x - I_1 = I} \quad ; ; \quad I_1 = 4 \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} \cdot dx \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} = t \\ dx = 2dt \end{array} \right\} \Rightarrow I = 8 \cdot \int \frac{1}{t^2 + 1} \cdot dt = 8 \text{ arc tag } t = 8 \text{ arc tag } \frac{x}{2} = I_1 \Rightarrow \underline{I = x - 8 \text{ arc tag } \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Sustituyendo en el área el valor de la integral obtenido, resulta:

$$\begin{aligned} S &= \left[2 \cdot \left(x - 8 \text{ arc tag } \frac{x}{2} \right) \right]_{2\sqrt{3}}^0 = \left[2 \cdot \left(0 - 8 \text{ arc tag } \frac{0}{2} \right) \right] - \left[2 \cdot \left(2\sqrt{3} - 8 \text{ arc tag } \frac{2\sqrt{3}}{2} \right) \right] = \\ & = 2 \cdot (-8 \text{ arc tag } 0) - 2 \cdot (2\sqrt{3} - 8 \text{ arc tag } \sqrt{3}) = -4\sqrt{3} + 16 \cdot \frac{\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})}} = S \end{aligned}$$

2º) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \frac{|x|}{2-x}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

La función dada puede expresarse de la forma $f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{2-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{2-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

El dominio de la función es \mathbb{R} , excepto los valores reales de x que anulan el denominador, o sea: $D(f) \Rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$.

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento determinamos su derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1 \cdot (2-x) - (-x) \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{-2+x-x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1 \cdot (2-x) - x \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x+x}{(x-2)^2} = \frac{2}{(x-2)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que el denominador es positivo para cualquier valor real de x y teniendo en cuenta el dominio de la función, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{\text{Decrecimiento: } f'(x) < 0 \Rightarrow (-\infty, 0)} \quad ; ; \quad \underline{\text{Crecimiento: } f'(x) > 0 \Rightarrow (0, 2) \cup (2, +\infty)}$$

Por tener el mismo grado el numerador y el denominador, la función no tiene asíntotas oblicuas.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$, o sea: son los valores finitos que toma la función para los valores infinitos (positivo y negativo) de la variable independiente:

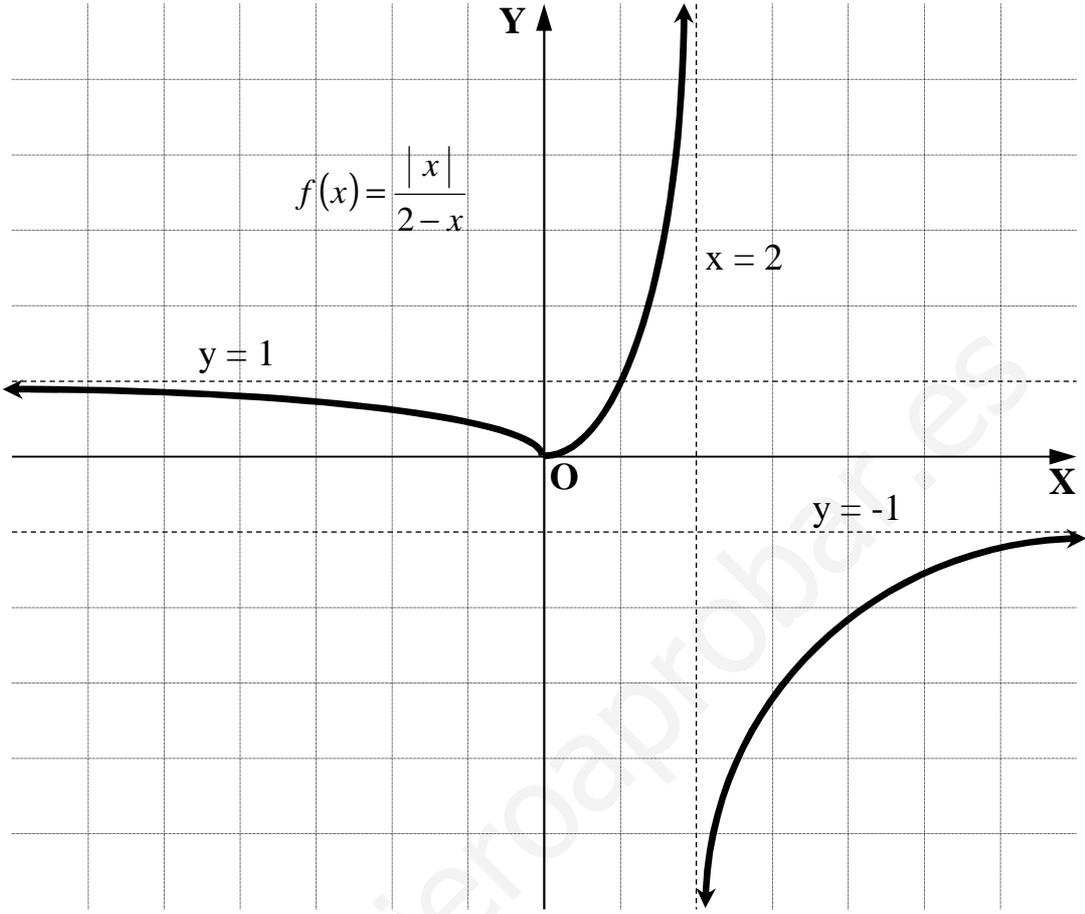
$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2-x} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Asíntota horizontal: } y = 1}}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2-x} = -1 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Asíntota horizontal: } y = -1}}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos que anulan el denominador:

$$\underline{\underline{\text{Asíntota vertical: } x = 2}}$$

Teniendo en cuenta que la función pasa por el origen de coordenadas y con los datos obtenidos anteriormente, se puede esbozar una gráfica de la función, que es la que se indica a continuación:



Nota: Conviene observar que la función es continua para $x = 0$ y sin embargo, no es derivable.

3º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $AB = BA$.

b) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10} .

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 2c+5c & 2c+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c = 2b \\ 2a = 2c \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{a = b = c}}$$

b)

$$\text{Para } a = b = c = 1 \text{ es } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 & 0 \\ 1+1 & 1+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 2+2 & 0 \\ 2+2 & 2+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 & 4+4 & 0 \\ 4+4 & 4+4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De lo anterior se deduce lógicamente que:

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{B^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

www.yoquieroaprobar.es

4º) Sean los puntos $A(\lambda, 2, \lambda)$, $B(2, -\lambda, 0)$ y $C(\lambda, 0, \lambda+2)$.

a) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C estén alineados?

b) Comprobar que si A, B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

c) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas.

a)

Los puntos A, B y C estarán alineados si los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ son linealmente dependientes, o sea, que sus componentes sean proporcionales:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2, -\lambda, 0) - (\lambda, 2, \lambda) = (2 - \lambda, -\lambda - 2, -\lambda)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (\lambda, 0, \lambda + 2) - (\lambda, 2, \lambda) = (0, -2, 2)$$

$$\frac{0}{2 - \lambda} = \frac{-2}{-\lambda - 2} = \frac{2}{-\lambda} \quad ; \quad \frac{0}{2 - \lambda} = \frac{1}{\lambda + 2} = \frac{1}{-\lambda} \Rightarrow \begin{cases} \frac{0}{2 - \lambda} = \frac{1}{\lambda + 2} \Rightarrow \underline{\lambda = 2} \\ \frac{1}{\lambda + 2} = \frac{1}{-\lambda} \Rightarrow \underline{\lambda = -1} \end{cases}$$

Los puntos A, B y C no están alineados $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

b)

Para que el triángulo ABC sea isósceles es necesario que dos de los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ y $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$ tengan el mismo módulo:

$$\vec{w} = \overrightarrow{BC} = C - B = (\lambda, 0, \lambda + 2) - (2, -\lambda, 0) = (\lambda - 2, \lambda, \lambda + 2).$$

Los módulos de los vectores son los siguientes:

$$|\vec{u}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2 - \lambda)^2 + (-\lambda - 2)^2 + (-\lambda)^2} = \sqrt{4 - 4\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 + \lambda^2} = \sqrt{4\lambda^2 + 8}$$

$$|\vec{v}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

$$|\vec{w}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(\lambda - 2)^2 + \lambda^2 + (\lambda + 2)^2} = \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda + 4} = \sqrt{4\lambda^2 + 8}$$

Como se acaba de comprobar los lados AB y BC son iguales y diferentes del lado AC, lo cual indica que:

El triángulo ABC es isósceles, como teníamos que demostrar.

c)

Para $\lambda = 0$ los puntos son $A(0, 2, 0)$, $B(2, 0, 0)$ y $C(0, 0, 2)$ y los vectores que determinan son $\vec{u} = (2, -2, 0)$, $\vec{v} = (0, -2, 2)$ y $\vec{w} = (-2, 0, 2)$.

El plano π que los contiene puede obtenerse por uno cualquiera de los puntos y dos cualesquiera de los vectores, por ejemplo:

$$\pi(A; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad -x - z - (y-2) = 0 \quad ; ;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x + y + z - 2 = 0}}$$

Sabiendo que la distancia de un plano $\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ al origen de coordenadas viene dada por la fórmula $d(O, \alpha) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, en el caso que nos ocupa es:+

$$d(O, \pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ unidades} = d(O, \pi)}}$$
