PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2010 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

OPCIÓN A

1º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m.

b) En el caso de m = 0, resolver el sistema: $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

----

a)

$$Rango\ \ A \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(m-1)^2 + m + m - m(m-1) - m(m-1) - 2 =$$

$$= 2\left(m^2 - 2m + 1\right) + 2m - 2m(m-1) - 2 = 2m^2 - 4m + 2 + 2m - 2m^2 + 2m - 2 = \underline{0}.$$

$$Rango\ \ A \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)^3 + 1 + 1 - (m-1) - (m-1) - (m-1) =$$

$$= m^3 - 3m^2 + 3m - 1 + 2 - 3(m-1) = m^3 - 3m^2 + 3m + 1 - 3m + 3 = m^3 - 3m^2 + 4 = 0 \ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Resolviendo por Ruffini:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 0 & 4 \\
-1 & & -1 & 4 & -4 \\
\hline
 & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & -4 & \\
\hline
 & 1 & -2 & \boxed{0} & \\
2 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}
$$

Las soluciones son $\underline{m_1 = -1}$ y $\underline{m_2 = m_3 = 2}$.

$$Rango \;\; A \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{vmatrix} = m(m-1) + 2(m-1) + m - m - 2 - m(m-1)^2 =$$

$$= m^2 - m + 2m - 2 - 2 - m\left(m^2 - 2m + 1\right) = m^2 + m - 4 - m^3 + 2m^2 - m = -m^3 + 3m^2 - 4 = 0 \;\;;;$$

$$m^3 - 3m^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{m_1 = -1} \;\;;;\;\; \underline{m_2 = m_3 = 2}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \left\{ \begin{matrix} m \neq -1 \\ m \neq 2 \end{matrix} \right\} \;\Rightarrow\; Rango \;\; A = 3}}$$

$$Para \;\; m = -1 \;\Rightarrow\; A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \{F_1 + F_2 = -F_3\} \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; A = 2}.$$

$$Para \;\; m = 2 \;\Rightarrow\; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \{F_1 = F_2 = F_3\} \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; A = 1}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; m = 2 \;\Rightarrow\; Rango \;\; A = 1}}$$

b)

En el caso de m = 0, resulta: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, equivalente al sistema homogéneo siguiente: $\left. \begin{array}{r} -x + y + t = 0 \\ x - y + t = 0 \\ x + y + 2z - t = 0 \end{array} \right\}$.

Sabiendo que el rango A = 3 y que el número de incógnitas es 4, según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado. Además, de las dos primeras ecuaciones se deduce que t = 0.

Parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo x = λ, resulta y = λ y de la última ecuación: λ + λ +2z = 0 → z = -λ.

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \\ t = 0 \end{cases} ;; \quad \forall \lambda \in R}}$$

****

2º) Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} y=1 \\ z=3 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \end{cases}$, se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta t que corta a r_1 y r_2 y es perpendicular a ambas.

b) Hallar la distancia mínima entre r_1 y r_2.

----

a)

El procedimiento para hallar la ecuación de la recta t es el siguiente:

1.- Consideramos los puntos $A \in r_1 \;\; y \;\; B \in r_2$: <u>A(0, 1, 3)</u> y <u>B(0, 1, 1)</u>.

2.- Hallamos unos vectores directores de las rectas r_1 y r_2, que son los siguientes:

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i = (1,\ 0,\ 0) \;\;;;\;\; \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = k + j = j + k = (0,\ 1,\ 1).$$

3.- Obtenemos un vector $\overrightarrow{w}$, perpendicular a $\overrightarrow{v_1} \;\; y \;\; \overrightarrow{v_2}$:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k - j = -j + k \;\Rightarrow\; \underline{\overrightarrow{w} = (0,\ -1,\ 1)}$$

4.- Determinamos los planos $\pi_1 \;\; y \;\; \pi_2$, de la forma siguiente:

$$\pi_1\left(A;\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\;;;\;\; -(z-3)-(y-1)=0 \;\;;;\;\; z-3+y-1=0 \;\Rightarrow$$

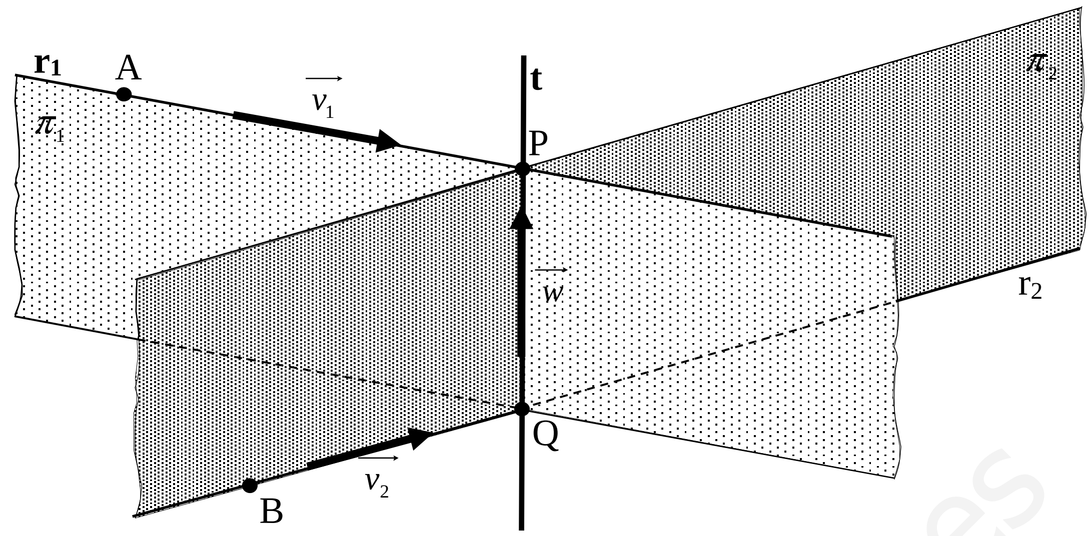
$$\Rightarrow \;\; \underline{\pi_1 \equiv y + z - 4 = 0}.$$

$$\pi_2\left(B;\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\;;;\;\; x + x = 0 \;\;;;\;\; 2x = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\pi_2 \equiv x = 0}.$$

La recta pedida t es la que determinan los planos $\pi_1 \;\; y \;\; \pi_2$ en su intersección:

$$\underline{\underline{t \equiv \begin{cases} y + z - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases}}}$$

Para una mejor comprensión del ejercicio se hace el esquema siguiente.



b)

La distancia mínima entre r_1 y r_2 es la que existe entre los punto P y Q.

El punto P es la intersección de la recta r_1 y el plano π_2:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 \equiv \begin{cases} y=1 \\ z=3 \end{cases} \\ \pi_2 \equiv x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P(0,\ 1,\ 3)}.$$

El punto Q es la intersección de la recta r_2 y el plano π_1:

$$\left.\begin{array}{l} r_2 \equiv \begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \end{cases} \\ \pi_2 \equiv y+z-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Q(0,\ 2,\ 2)}.$$

$$d(r_1,\ r_2) = \overline{PQ} = \sqrt{(0-0)^2+(2-1)^2+(2-3)^2} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}.$$

$$\underline{\underline{d(r_1,\ r_2) = \sqrt{2}\ \ unidades}}$$

****

3º) Calcular los límites: a) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + arc\ tag\ x)^{\frac{\alpha}{x}}$. b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x}$.

----

a)

$$\lim_{x \to 0} (1 + arc\ tag\ x)^{\frac{\alpha}{x}} = \lim_{x \to 0} \left[(1 + arc\ tag\ x)^{\frac{1}{x}} \right]^{\alpha} = \left[\lim_{x \to 0} (1 + arc\ tag\ x)^{\frac{1}{x}} \right]^{\alpha} =$$

$$= \left[(1+0)^{\infty} \right]^{\alpha} = \left(1^{\infty} \right)^{\alpha} \Rightarrow Tipo\ \ n^{o}\ \ e \Rightarrow \left[\lim_{x \to 0} (1 + arc\ tag\ x)^{\frac{1}{arc\ tag\ x} \cdot \frac{arc\ tag\ x}{x}} \right]^{\alpha} =$$

$$= \left[\left\{ \lim_{x \to 0} (1 + arc\ tag\ x)^{\frac{1}{arc\ tag\ x}} \right\}^{\frac{arc\ tag\ x}{x}} \right]^{\alpha} = e^{\alpha \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{arc\ tag\ x}{x}} = e^{\alpha} + e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{arc\ tag\ x}{x}} = e^{\alpha} + e^{\frac{0}{0}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0}{0} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow e^{\alpha} + e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}} = e^{\alpha} + e^{1} = \underline{\underline{e^{\alpha+1}}}$$

b)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x} = \frac{\infty + \infty}{\infty + \infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x + 2e^x}{5e^x}}{\frac{7x + 5e^x}{5e^x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x}{5e^x} + \frac{2}{5}}{\frac{7x}{5e^x} + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x}{5e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3}{5e^x} = \frac{3}{\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x}{5e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \frac{7}{5e^x} = \frac{7}{\infty} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\frac{2}{5}}{1} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}.$$

****

4º) Calcular: a) $I_1=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\cdot dx$.   b) $I_2=\int_0^1 x\cdot\cos x\cdot dx$.

----

a)

$$I_1=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l|l} 4-x^2=t & \\ -2xdx=dt & x=1\to t=3 \\ xdx=-\frac{1}{2}dt & x=0\to t=4 \end{array}\right\} \Rightarrow I_1=-\frac{1}{2}\cdot\int_4^3 \frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\cdot\int_4^3 t^{-\frac{1}{2}}\cdot dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_4^3=-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_4^3=-\left[\sqrt{t}\right]_4^3=-\left(\sqrt{3}-\sqrt{4}\right)=\underline{\underline{2-\sqrt{3}=I_1}}.$$

b)

$$I_2=\int_0^1 x\cdot\cos x\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=u\to du=dx \\ \cos x\cdot dx=dv\to v=sen\ x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I_2=\left[x\,sen\ x-\int sen\ x\cdot dx\right]_0^1=\left[x\,sen\ x+\cos x\right]_0^1=\left[1\cdot sen\ (1\ rad)+\cos\ (1\ rad)\right]-$$

$$-\left(0\cdot sen\ 0+\cos\ 0\right)=0'8415+0'5403-0-1=1'3818-1=\underline{\underline{0'3818=I_2}}.$$

<u>Nota</u>: Advertir que la unidad natural de ángulos es el radián. Sabiendo que 360º equivalen a 2π radianes, un radián equivale $\frac{360º}{2\pi}=\frac{180º}{\pi}$.

****

OPCIÓN B

1º) Dado el plano $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$ y el plano π_2 determinado por el punto P(0, 2, 4) y los vectores $\overrightarrow{v_1} = (0,\ 2,\ 6)$ y $\overrightarrow{v_2} = (1,\ 0,\ b)$, se pide:

a) Calcular los valores α y b para que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) Para α = 1 y b = 0 determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2.

c) Para α = 4 y b = -2 determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2.

----

a)

La ecuación general del plano π_2 en función de b es la siguiente:

$$\pi_2(P;\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z-4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 2bx + 6(y-2) - 2(z-4) = 0 \ ;;$$

$$2bx + 6y - 12 - 2z + 8 = 0 \ ;;\ bx + 3y - 6 - z + 4 = 0 \ \Rightarrow\ \underline{\pi_2 \equiv bx + 3y - z = 2}.$$

Para que los planos π_1 y π_2 sean paralelos es necesario que sus vectores normales sean linealmente dependientes (paralelos):

$$\frac{2}{b} = \frac{-3}{3} = \frac{1}{-1} \ \Rightarrow\ \underline{b = -2}.$$

<u>Los planos π_1 y π_2 son paralelos para b = -2 y cualquier valor real de α.</u>

b)

Para α = 1 y b = 0 los planos son $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = 1$ y $\pi_2 \equiv 3y - z = 2$; la recta que determinan es $t \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3y - z = 2 \end{cases}$. Para expresar la recta t por unas ecuaciones paramétricas, como se nos pide, "parametrizamos" una de las incógnitas, por ejemplo $y = \lambda$:

$$t \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3y - z = 2 \end{cases} \ \Rightarrow\ \underline{y = \lambda} \ ;;\ \underline{z = -2 + 3\lambda} \ ;;\ 2x = 1 + 3y - z = 1 + 3\lambda + 2 - 3\lambda = 3 \ ;;\ \underline{x = \frac{3}{2}}.$$

$$\underline{\underline{t \equiv \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}}}$$

c)

Para α = 4 y b = -2 los planos son $\pi_1 \equiv 2x-3y+z=4$ y $\pi_2 \equiv 2x-3y+z=-2$, que como se aprecia, son paralelos, por lo tanto, los puntos pedidos determinan el plano π_3, paralelo y equidistante a los anteriores.

Una forma de hallar el plano π_3 es la siguiente:

Determinamos una recta s perpendicular a los planos π_1 y π_2 que puede determinarse por cualquier punto, por ejemplo O(0, 0, 0), y el vector normal a los planos, que es $\overrightarrow{n}=(2,\ -3,\ 1)$: $s \equiv \begin{cases} x=2\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$.

Determinamos ahora los puntos de corte de s con los planos π_1 y π_2:

$$\left.\begin{array}{l} s \equiv \begin{cases} x=2\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \\ \pi_1 \equiv 2x-3y+z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2\cdot(2\lambda)-3\cdot(-3\lambda)+1\cdot(\lambda)=4\ ;;\ 4\lambda+9\lambda+\lambda=4\ ;;\ 14\lambda=4$$

$$7\lambda=2\ ;;\ \underline{\lambda=\frac{2}{7}}\ \Rightarrow\ \underline{N\left(\frac{4}{7},\ -\frac{6}{7},\ \frac{2}{7}\right)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} s \equiv \begin{cases} x=2\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \\ \pi_2 \equiv 2x-3y+z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2\cdot(2\lambda)-3\cdot(-3\lambda)+1\cdot(\lambda)=-2\ ;;\ 4\lambda+9\lambda+\lambda=-2$$

$$14\lambda=-2\ ;;\ 7\lambda=-1\ ;;\ \underline{\lambda=-\frac{1}{7}}\ \Rightarrow\ \underline{Q\left(-\frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ -\frac{1}{7}\right)}.$$

El punto medio de N y Q es $\underline{M\left(\frac{2}{14},\ -\frac{3}{14},\ \frac{1}{14}\right)}$.

El plano pedido π_3 es de la forma $\pi_3 \equiv 2x-3y+z+D=0$ y contiene a M, por lo tanto tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} M\left(\frac{2}{14},\ -\frac{3}{14},\ \frac{1}{14}\right) \\ \pi_3 \equiv 2x-3y+z+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot\frac{2}{14}-3\cdot\frac{-3}{14}+1\cdot\frac{1}{14}+D=0\ ;;\ 1+D=0\ ;;\ \underline{D=-1}.$$

$$\underline{\underline{\pi_3 \equiv 2x-3y+z-1=0}}.$$

****

2º) Los puntos P(1, 2, 1), Q(2, 1, 1) y A(α, 0, 0) con α > 3, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcular el valor de α para que el tetraedro determinado por los puntos A, B, C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.

Los vectores que determinan al plano π son:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AP}=P-A=(1,\ 2,\ 1)-(\alpha,\ 0,\ 0)=\underline{(1-\alpha,\ 2,\ 1)}.$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AQ}=Q-A=(2,\ 1,\ 1)-(\alpha,\ 0,\ 0)=\underline{(2-\alpha,\ 1,\ 1)}.$$

Considerando, por ejemplo, el punto A(α, 0, 0):

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1-\alpha & 2 & 1 \\ 2-\alpha & 1 & 1 \end{vmatrix}=0\ ;;$$

$$2(x-1)+(1-\alpha)(z-1)+(2-\alpha)(y-2)-2(2-\alpha)(z-1)-(x-1)-(1-\alpha)(y-2)=0\ ;;$$

$$2x-2+z-1-\alpha z+\alpha+2y-4-\alpha y+2\alpha-2(2z-2-\alpha z+\alpha)-x+1-(y-2-\alpha y+2\alpha)=0\ ;;$$

$$x-6+z-\alpha z+3\alpha+2y-\alpha y-4z+4+2\alpha z-2\alpha-y+2+\alpha y-2\alpha=0\ ;;$$

$$\underline{\pi\equiv x+y+(\alpha-3)z-\alpha=0}.$$

El punto de corte de $\pi\equiv x+y+(\alpha-3)z-\alpha=0$ con OY es:

$$\left.\begin{array}{l}\pi\equiv x+y+(\alpha-3)z-\alpha=0\\ x=0\\ z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\ \underline{B(0,\ \alpha,\ 0)}.$$

El punto de corte de $\pi\equiv x+y+(\alpha-3)z-\alpha=0$ con OZ es:

$$\left.\begin{array}{l}\pi\equiv x+y+(\alpha-3)z-\alpha=0\\ x=0\\ y=0\end{array}\right\}\Rightarrow\ \underline{C\left(0,\ 0,\ \frac{\alpha}{\alpha-3}\right)}.$$

Los vectores que determinan el tetraedro son:

$$\overrightarrow{OA}=(\alpha,\ 0,\ 0)\ ;;\ \overrightarrow{OB}=\underline{(0,\ \alpha,\ 0)}\ ;;\ \overrightarrow{OC}=\underline{\left(0,\ 0,\ \tfrac{\alpha}{\alpha-3}\right)}.$$

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan, en valor absoluto, será:

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\right]\right|=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{\alpha-3}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\left|\frac{\alpha^3}{\alpha-3}\right|\Rightarrow\{\alpha>3\}\Rightarrow \underline{V=\frac{1}{6}\cdot\frac{\alpha^3}{\alpha-3}}.$$

Para que el volumen sea mínimo es necesario que se anule su primera derivada y que la segunda derivada sea positiva para los valores que anulen la primera:

$$V'=\frac{1}{6}\cdot\frac{3\alpha^2(\alpha-3)-\alpha^3}{(\alpha-3)^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{3\alpha^3-9\alpha^2-\alpha^3}{(\alpha-3)^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2\alpha^3-9\alpha^2}{(\alpha-3)^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{\alpha^2(2\alpha-9)}{(\alpha-3)^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \alpha^2(2\alpha-9)=0\ ;;\ \underline{\alpha_1=\alpha_2=0}\ ;;\ 2\alpha-9=0\ ;;\ \underline{\alpha_3=\frac{9}{2}}.$$

Como tiene que ser α > 3, la solución tiene que ser $\alpha=\frac{9}{2}$.

Vamos a justificar que para este valor la segunda derivada es positiva:

$$V''=\frac{1}{6}\frac{(6\alpha^2-18\alpha)(\alpha-3)^2-\alpha^2(2\alpha-9)\cdot 2(\alpha-3)}{(\alpha-3)^4}=\frac{1}{6}\frac{(6\alpha^2-18\alpha)(\alpha-3)-2\alpha^2(2\alpha-9)}{(\alpha-3)^3}=$$

$$=\frac{1}{6}\frac{6\alpha^3-18\alpha^2-18\alpha^2+54\alpha-4\alpha^3+18\alpha^2}{(\alpha-3)^3}=\frac{1}{6}\frac{2\alpha^3-18\alpha^2+54\alpha}{(\alpha-3)^3}=\frac{1}{3}\frac{\alpha^3-9\alpha^2+27\alpha}{(\alpha-3)^3}=$$

$$=\underline{\frac{1}{3}\frac{\alpha(\alpha^2-9\alpha+27)}{(\alpha-3)^3}=V''(\alpha).}$$

$$V''\left(\tfrac{9}{2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{9}{2}\cdot\left[\left(\frac{9}{2}\right)^2-9\cdot\frac{9}{2}+27\right]}{\left(\frac{9}{2}-3\right)^3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{81}{4}-\frac{81}{2}+27}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{81-162+108}{4}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{189-162}{2}=\frac{1}{6}\cdot 27=\frac{9}{2}>0\ \Rightarrow\ \underline{V''\left(\tfrac{9}{2}\right)>0,\ \textit{como queríamos justificar}}.$$

$$\underline{\underline{\alpha=\frac{9}{2}}}$$

****

3º) Dado el sistema: $\begin{cases} x+2y-z=o \\ 2x-z+z=3 \end{cases}$, se pide:

a) Estudiar la compatibilidad del sistema.

b) Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.

c) Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es evidente que $Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 2$; aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{\underline{Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 2 < n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow\ Compatible\ \ Indeterminado}}$$

b)

Para que el sistema sea compatible determinado es necesario que el rango de la matriz de coeficientes sea igual que el número de incógnitas, o sea tres; para ello es suficiente con añadir cualquier ecuación que sea linealmente independiente de las dos ecuaciones dadas, como por ejemplo la ecuación $x+y+z=0$.

El sistema resulta $\underline{\underline{\begin{cases} x+2y-z=o \\ 2x-z+z=3 \\ x+y+z=0 \end{cases}}}$.

Aunque no es necesario, comprobamos que la matriz de coeficientes tiene por rango 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1-2+2-1-1-4 = -7 \neq 0 \ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M = 3,\ \ c.q.c.}$$

c)

Para que el sistema sea incompatible es necesario que los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada sean diferentes; para ello basta con añadir una ecuación cuyos coeficientes sean linealmente dependientes de las ecuaciones de coeficientes dados y no lo sean los términos independientes; por ejemplo: $3x+y=0$.

El sistema resulta $\underline{\underline{\begin{cases} x+2y-z=o \\ 2x-z+z=3 \\ 3x+y=0 \end{cases}}}$.

Aunque no es necesario, comprobamos que las matrices de coeficientes y ampliada tienen rangos diferentes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \{F_1 + F_2 = F_3\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M = 2}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 18 - 3 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M' = 3}.$$

$$\underline{Rango\ \ M \neq Rango\ \ M' \Rightarrow Sistema\ \ Incompatible,\ c.q.c.}$$

****

4º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro α.

b) ¿Para qué valores de α existe la matriz inversa A^{-1}? Calcular A^{-1} para α = 1.

----

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix}=-\alpha(\alpha-1)(\alpha+2)-\alpha^3=\left(\alpha-\alpha^2\right)(\alpha+2)-\alpha^3=$$

$$=-\alpha\left[(\alpha-1)(\alpha+2)+\alpha^2\right]=-\alpha\left(\alpha^2+2\alpha-\alpha-2\right)=-\alpha\left(\alpha^2+\alpha-2\right)=0 \Rightarrow \alpha_1=0 \;;;$$

$$\alpha^2+\alpha-2=0 \;;;\; \alpha=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \underline{\alpha_2=-2} \;;;\; \underline{\alpha_3=1}.$$

$$Para\ \ \alpha=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ A=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \alpha=0 \Rightarrow Rango\ \ A=2}}$$

$$Para\ \ \alpha=-2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-8\neq 0 \Rightarrow$$

$$Para\ \ \alpha=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{cases} \alpha=-2 \\ \alpha=1 \end{cases} \Rightarrow Rango\ \ A=3}}$$

b)

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

<u>Existe la matriz inversa de A para α = -2 y para α = 1.</u>

Para obtener la matriz inversa de A vamos a utilizar el método de Gauss-Jordan.

Para α = 1 es $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$(A/I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 + F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_2 - 3F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}}$$

****