

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE MADRID****SEPTIEMBRE – 2011 (GENERAL)**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) a) Calcular los límites: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}}$.

b) Calcular la integral: $I = \int_0^1 \frac{x}{1+3x^2} \cdot dx$.

c) Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada.

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}} = \frac{2}{4+e^{-\infty}} = \frac{2}{4+\frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{2}{4+\frac{1}{\infty}} = \frac{2}{4+0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{4+e^{-(x+1)}} = \frac{2}{4+e^{-(-\infty)}} = \frac{2}{4+e^{\infty}} = \frac{2}{4+\infty} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

b)

$$I = \int_0^1 \frac{x}{1+3x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1+3x^2 = t \\ 6x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{6} dt \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=1 \rightarrow t=4 \\ x=0 \rightarrow t=1 \end{array} \Rightarrow I = \frac{1}{6} \cdot \int_1^4 \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{1}{6} \cdot [Lt]_1^4 =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (L4 - L1) = \frac{1}{6} \cdot L4 = \frac{1}{6} \cdot L2^2 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot L2 = \frac{L2}{3} = I.$$

c)

$f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 14}$ está definida para los valores de x tales que $x^2 - 9x + 14 \geq 0$.

$$x^2 - 9x + 14 = 0 \;; \; x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} \Rightarrow \underline{x_1 = 2} \;; \; \underline{x_2 = 7}.$$

La función $g(x) = x^2 - 9x + 14$ es una parábola convexa ($\cup$) cuyos puntos de corte con los ejes son A(2, 0) y B(7, 0), teniendo como ordenadas positivas o nulas al conjunto de valores que determinan el dominio de definición de $f(x)$, que es el siguiente:

$$\underline{\underline{D(f) \Rightarrow (-\infty, 2] \cup [7, +\infty)}}$$

La derivada de $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 14}$ es la siguiente: $f'(x) = \frac{2x - 9}{2 \cdot \sqrt{x^2 - 9x + 14}}$.

Los valores en que está definida $f'(x)$ son el conjunto de valores de la función $g(x) = x^2 - 9x + 14$ tales que $g(x) > 0$, que son los siguientes:

$$\underline{\underline{f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 14} \text{ es derivable para } x \in (-\infty, 2) \cup (7, +\infty)}}$$

2º) Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x+3y+z-1=0$, $\pi_2 \equiv 2x+y-3z-1=0$ y la recta r de ecuaciones continuas $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+2}{2}$, se pide:

- a) El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2 .
- b) El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados XY , XZ e YZ .
- c) La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2 .

a) La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$. Los puntos de r tiene la expresión general: $P(1+2\lambda, -1+\lambda, -2+2\lambda)$.

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano genérico $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula: $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Por definición del problema tiene que cumplirse que $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$:

$$\frac{|2 \cdot (1+2\lambda) + 3 \cdot (-1+\lambda) + (-2+2\lambda) - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{|2 \cdot (1+2\lambda) + 1 \cdot (-1+\lambda) - 3(-2+2\lambda) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} ;;$$

$$\frac{|2+4\lambda-3+3\lambda-2+2\lambda-1|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{|2+4\lambda-1+\lambda+6-6\lambda-1|}{\sqrt{1+4+9}} ;; |9\lambda-4| = |-\lambda+6| \Rightarrow \begin{cases} 9\lambda-4 = -\lambda+6 \\ 9\lambda-4 = \lambda-6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10\lambda = 10 ;; \lambda_1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(3, 0, 0)}} \\ 8\lambda = -2 ;; 4\lambda = -1 \Rightarrow \underline{\lambda_2 = -\frac{1}{4}} \Rightarrow P_2\left(1-\frac{2}{4}, -1-\frac{1}{4}, -2-\frac{2}{4}\right) \Rightarrow \underline{\underline{P_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right)}} \end{cases}.$$

b)

Los puntos de corte con los ejes coordenados del plano $\pi_1 \equiv 2x+3y+z-1=0$ son los siguientes:

$$\text{Eje X} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 2x-1=0 ;; x=\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{A\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)}}.$$

$$\text{Eje Y} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 3y-1=0 ;; y=\frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{B\left(0, \frac{1}{3}, 0\right)}}.$$

$$\text{Eje Z} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow z-1=0 \;; \; z=1 \Rightarrow \underline{C(0, 0, 1)}.$$

Sabiendo que el volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan; en este caso son $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $\vec{v} = \left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$ y $\vec{w} = (0, 0, 1)$.

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1\right) = \underline{\underline{\frac{1}{36} u^3 = V_{OABC}}}.$$

c)

Existen diversos procedimientos para hallar la proyección ortogonal de una recta sobre un plano; uno de ellos es el siguiente: hallamos dos puntos de la recta y por ellos hallamos las rectas perpendiculares al plano; estas rectas cortan al plano en un punto cada una de ellas; la recta que pasa por los puntos de corte es la proyección pedida.

Dos puntos de $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+2}{2}$ son A(1, -1, -2) y B(3, 0, 0).

El vector normal del plano $\pi_2 \equiv 2x + y - 3z - 1 = 0$ es $\vec{n} = (2, 1, -3)$.

Las rectas perpendiculares al plano π_2 por los puntos A y B son $s_A \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2-3\lambda \end{cases}$ y

$$s_B \equiv \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-3\lambda \end{cases}.$$

Los puntos de corte de las rectas s_A y s_B con el plano π_2 son los siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} s_A \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2-3\lambda \end{cases} \\ \pi_2 \equiv 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot (1+2\lambda) + (-1+\lambda) - 3 \cdot (-2-3\lambda) - 1 = 0 \;;$$

$$2+4\lambda-1+\lambda+6+9\lambda-1=0 \;; \; 14\lambda+6=0 \;; \; 7\lambda=-3 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -\frac{3}{7}}} \Rightarrow \underline{\underline{A'\left(\frac{1}{7}, -\frac{10}{7}, -\frac{5}{7}\right)}}.$$

$$\left. \begin{array}{l} s_B \equiv \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-3\lambda \end{cases} \\ \pi_2 \equiv 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot (3+2\lambda) + \lambda - 3 \cdot (-3\lambda) - 1 = 0 \;; \; 6+4\lambda+\lambda+9\lambda-1=0 \;;$$

$$14\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{14} \Rightarrow B' \left(\frac{32}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{15}{14} \right).$$

Los puntos A' y B' determinan el vector $\overrightarrow{A'B'} = B' - A' = \left(\frac{30}{14}, \frac{15}{14}, \frac{25}{14} \right)$.

Un vector director de la recta pedida s es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{A'B'} = \left(\frac{30}{14}, \frac{15}{14}, \frac{25}{14} \right)$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_s} = (6, 3, 5)$.

Considerando un punto de s, por ejemplo $A' \left(\frac{1}{7}, -\frac{10}{7}, -\frac{5}{7} \right)$, la expresión dada por unas ecuaciones continuas de la recta s es la siguiente:

$$s \equiv \frac{x - \frac{1}{7}}{6} = \frac{y + \frac{10}{7}}{3} = \frac{z + \frac{5}{7}}{5} ; ; \frac{7x - 1}{42} = \frac{7y + 10}{21} = \frac{7z + 5}{35} \Rightarrow s \equiv \frac{7x - 1}{6} = \frac{7y + 10}{3} = \frac{7z + 5}{5}.$$

Otra forma de obtener la recta s es la siguiente: determinamos un plano α que contenga a r y sea perpendicular al plano π_2 ; la intersección de los planos α y π_2 determinan la recta pedida s.

El plano α tiene como vectores directores al vector normal de π_2 y al vector director de r, que son $\overrightarrow{n} = (2, 1, -3)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, 2)$, respectivamente.

Considerando el punto de r, P(1, -1, -2), la expresión general del plano α es la siguiente: $\alpha(P; \overrightarrow{n}, \overrightarrow{v_r}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 ; ;$

$$2(x-1) - 6(y+1) + 2(z+2) - 2(z+2) + 3(x-1) - 4(y+1) = 0 ; ; 5(x-1) - 10(y+1) = 0 ; ;$$

$$x-1-2(y+1)=0 ; ; x-1-2y-2=0 \Rightarrow \underline{\alpha \equiv x-2y-3=0}.$$

$$\underline{s \equiv \begin{cases} 2x+y-3z-1=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases}}.$$

Expresada por unas ecuaciones continuas es:

$$s \equiv \begin{cases} 2x+y-3z-1=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{y = \lambda} ; ; \underline{x = 3 + 2\lambda} ; ; 3z = 2x + y - 1 = 6 + 4\lambda + \lambda - 1 = 5\lambda + 5 ; ;$$

$$\underline{z = \frac{5}{3} + \frac{5}{3}\lambda} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{5}{3} + \frac{5}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z - \frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} ; ; \underline{s \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{3z-5}{5}}.$$

Otra forma de resolver el problema es la siguiente: hallando el haz de planos que contienen a la recta r ; haciendo que su vector normal sea perpendicular al vector normal del plano π_2 obtenemos un plano β ; la intersección de los planos π_2 y β determinan a la recta s pedida.

La expresión de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+2}{2}$ por unas ecuaciones implícitas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x-1=2y+2 \\ x-1=z+2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-2y-3=0 \\ x-z-3=0 \end{cases}$.

El haz de planos que contienen a r es $\gamma \equiv x-2y-3+\lambda(x-z-3)=0$, que también puede expresarse de la forma $\gamma \equiv (1+\lambda)x-2y-\lambda z-(3+3\lambda)=0$, cuyo vector normal es el siguiente: $\vec{n}_\gamma = (1+\lambda, -2, -\lambda)$.

El vector normal de $\pi_2 \equiv 2x+y-3z-1=0$ es $\vec{n}_2 = (2, 1, -3)$.

$$\vec{n}_\gamma \perp \vec{n}_2 \Rightarrow (1+\lambda, -2, -\lambda) \cdot (2, 1, -3) = 0 \;; \; 2+2\lambda-2+3\lambda=0 \;; \; 5\lambda=0 \;; \; \underline{\lambda=0}.$$

El plano del haz γ que es perpendicular a π_2 es el siguiente: $\beta \equiv x-2y-3=0$.

La recta pedida es $s \equiv \begin{cases} 2x+y-3z-1=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases}$. Expresada por unas ecuaciones continuas es como sigue:

$$s \equiv \begin{cases} 2x+y-3z-1=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{y=\lambda} \;; \; \underline{x=3+2\lambda} \;; \; 3z=2x+y-1=6+4\lambda+\lambda-1=5+5\lambda \;;$$

$$\underline{z=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}\lambda} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} \;; \; \underline{\underline{s \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{3z-5}{5}}}.$$

Nótese que, aunque las expresiones son diferentes, se trata de la misma recta.

3º) Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro α .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \\ F_4 \rightarrow F_4 - (a+2)F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & a-2 \\ 0 & -6 & 4-a \\ 0 & -3a-6 & 3a+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 + F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 4-a \\ 0 & -3a-6 & 3a+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \rightarrow -\frac{1}{2}F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 4-a \\ 0 & -3a-6 & 3a+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_3 \rightarrow F_3 + 6F_2 \\ F_4 \rightarrow F_4 + (3a+6)F_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2-a \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \leftrightarrow F_4\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2-a \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Rango A=3, \forall a \in R.}}$$

4º) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el determinante de la matriz M.

b) Hallar la matriz M^2 .

c) Hallar la matriz M^{25} .

a)

$$|M| = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Rango } M = 3.}}$$

b)

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 0 & \operatorname{sen} x \cdot \cos x - \cos x \cdot \operatorname{sen} x + 0 & 0 + 0 + 0 \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x & \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + 0 & 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{I = M^2.}}$$

c)

$$M^{25} = M^{12 \cdot 2 + 1} = (M^2)^{12} \cdot M = I^{12} \cdot M = I \cdot M = \underline{\underline{M = M^{25}}}.$$

OPCIÓN B

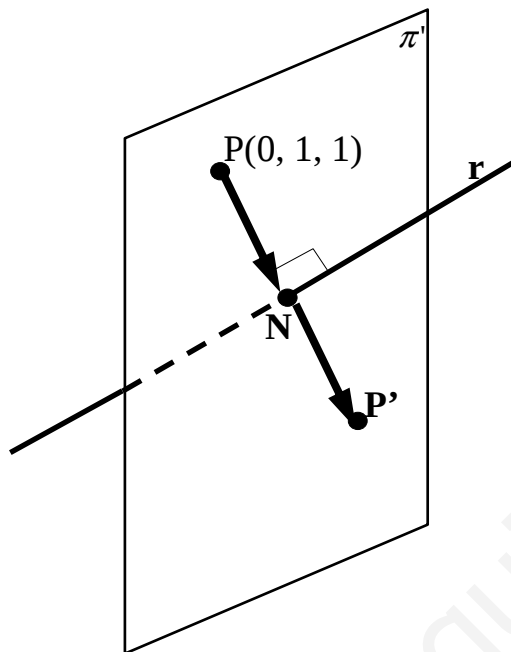
1º) Dado el punto $P(0, 1, 1)$ y las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto a r.

b) Determinar la recta que pasa por el punto P, tiene dirección perpendicular a la recta r y corta a la recta s.

a)

Un vector director de r es $\vec{v} = (2, 1, -1)$.



La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x=1+2k \\ y=-1+k \\ z=-k \end{cases}$.

El plano π' , perpendicular a r por P(0, 1, 1), es el que tiene como vector normal a $\vec{v}$ y contiene al punto P:

$$\left. \begin{aligned} \pi' &\equiv 2x + y - z + D = 0 \\ P(0, 1, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 0 + 1 - 1 + D = 0 \;; \; \underline{D=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\pi' \equiv 2x + y - z = 0}.$$

Con objeto de clarificar la situación, la expresamos en la figura adjunta de forma aproximada.

El punto N de intersección de la recta r con el plano π' es el siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \pi' &\equiv 2x + y - z = 0 \\ r &\equiv \begin{cases} x=1+2k \\ y=-1+k \\ z=-k \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2(1+2k) + (-1+k) - (-k) = 0 \;; \; 2 + 4k - 1 + k + k = 0 \;; \; 6k = -1 \;;$$

$$\underline{k = -\frac{1}{6}} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3} \\ y &= -1 - \frac{1}{6} = -\frac{7}{6} \\ z &= -\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{N\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, \frac{1}{6}\right)}.$$

Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a r, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP'} \Rightarrow N - P = P' - N \;; \left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, \frac{1}{6}\right) - (0, 1, 1) = (x, y, z) - \left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, \frac{1}{6}\right) \;;$$

$$\left(\frac{2}{3}, -\frac{13}{6}, -\frac{5}{6}\right) = \left(x - \frac{2}{3}, y + \frac{7}{6}, z - \frac{1}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{2}{3} = -\frac{13}{6} \rightarrow x = -\frac{17}{6} \\ y + \frac{7}{6} = -\frac{5}{6} \rightarrow y = -\frac{12}{6} \\ z - \frac{1}{6} = -\frac{5}{6} \rightarrow z = -\frac{4}{6} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{P'\left(-\frac{17}{6}, -2, -\frac{2}{3}\right)}}$$

b)

El haz de planos α perpendiculares a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ tiene como vector normal al vector director de r, que es $\vec{v} = (2, 1, -1)$. La expresión general de α es la siguiente: $\alpha \equiv 2x + y - z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz $\alpha \equiv 2x + y - z + D = 0$, el plano μ que contiene al punto P(0, 1, 1) es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{matrix} \alpha \equiv 2x + y - z + D = 0 \\ P(0, 1, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow 1 - 1 + D = 0 \;; \underline{D = 0} \Rightarrow \underline{\underline{\mu \equiv 2x + y - z = 0}}$$

El punto Q de corte de la recta s con el plano μ es la solución del sistema que forman:

$$\left. \begin{matrix} s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \mu \equiv 2x + y - z = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{Q(0, 0, 0)}$$

La recta t pedida es la que pasa por los puntos P(0, 1, 1) y Q(0, 0, 0), cuya expresión dada por unas ecuaciones paramétricas es $t \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda, \forall \lambda \in R \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

2º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x + 4y = 4k \\ -k^3x + k^2y + kz = 0 \\ x + ky = k^2 \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo en función del valor del parámetro k.

b) Resolver el sistema para k = 1.

c) Resolver el sistema para k = 2.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -k^3 & k^2 & k \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 4k \\ -k^3 & k^2 & k & 0 \\ 1 & k & 0 & k^2 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -k^3 & k^2 & k \\ 1 & k & 0 \end{vmatrix} = 4k - 2k^2 = 2k(2 - k) = 0 \Rightarrow \underline{k_1 = 0} \text{ ; } \underline{k_2 = 2}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} k \neq 0 \\ k \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$$

$$\text{Para } k = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2}.$$

$$\text{Para } k = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 8 \\ -8 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = 2F_3\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} k = 0 \\ k = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$$

b)

$$\text{Resolvemos para } k = 1. \text{ El sistema resulta } \begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ -x + y + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}, \text{ que es compatible de-}$$

terminado. Resolvemos:

$$\begin{cases} x+2y=2 \\ -x+y+z=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \text{De las ecuaciones primera y tercera se deduce que } x=0 \text{ e } y=1.$$

Sustituyendo en la segunda: $-0+1+z=0$;; $z=-1$.

$$\underline{\underline{\text{Solución: } \{x=0 \text{ ;; } y=1 \text{ ;; } z=-1\}}}$$

c)

Resolvemos para $k=2$. El sistema resulta $\begin{cases} 2x+4y=8 \\ -8x+4y+2z=0 \\ x+2y=4 \end{cases}$, equivalente al siste-

ma $\begin{cases} -4x+2y+z=0 \\ x+2y=4 \end{cases}$ que es compatible determinado.

$$\begin{cases} -4x+2y+z=0 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \underline{y=\lambda} \text{ ;; } \underline{x=4-2\lambda} \text{ ;; } z=4x-2y=16-8\lambda-2\lambda=\underline{16-10\lambda=z}.$$

$$\underline{\underline{\text{Solución: } \begin{cases} x=4-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=16-10\lambda \end{cases}, \forall \lambda \in R}}}$$

3º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ \frac{\cos x - 1}{\sin x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, hallar el valor de k para que f sea continua

en $x = 0$. Justificar la respuesta.

Para que la función $f(x)$ sea continua para $x = 0$ tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$\text{Para } x=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = 0 \quad (*) \end{array} \right\}.$$

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indeter.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = \frac{-0}{1} = 0.$$

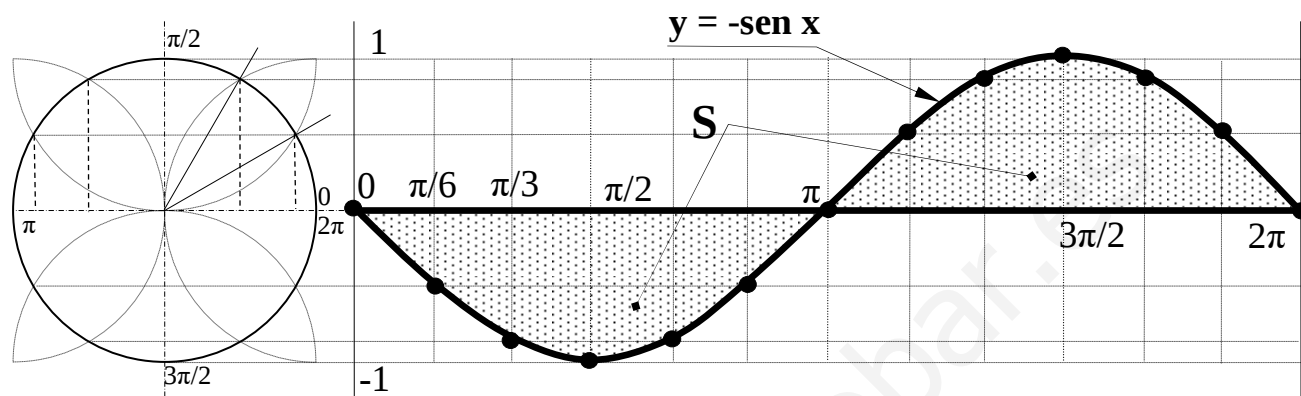
Teniendo que ser $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0):$

La función $f(x)$ es continua para $x = 0$ para el valor de $k = 0$.

4º) a) Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -\operatorname{sen} x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

b) Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -\operatorname{sen} x$ alrededor del eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

a)



La gráfica de la función $f(x) = -\operatorname{sen} x$ es la de la figura, de la cual se deduce el área pedida, que es la siguiente:

$$S = \int_{\pi}^0 -\operatorname{sen} x \cdot dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\operatorname{sen} x \cdot dx = [\cos x]_{\pi}^0 + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = (\cos 0 - \cos \pi) + (\cos 2\pi - \cos \pi) =$$

$$= 1 - (-1) + 1 - (-1) = \underline{\underline{4}} = S.$$

b)

Sabiendo que el volumen de un cuerpo de revolución engendrado al girar la curva $f(x)$ alrededor del eje de abscisas limitado por $x = a$ y $x = b$ viene dado por la expresión integral $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \cdot dx$, el volumen pedido es el siguiente:

$$V = \pi \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} x)^2 \cdot dx = 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \cdot dx = 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot dx = \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) =$$

$$= \pi \int_0^{\pi} dx + \pi \int_0^{\pi} \cos 2x \cdot dx = \underline{\underline{I_1 + I_2 = V}}. \quad (*)$$

$$I_1 = \pi \int_0^{\pi} dx = [x]_0^{\pi} = \pi(\pi - 0) = \underline{\underline{\pi^2}} = I_1.$$

$$I_2 = \pi \int_0^{\pi} \cos 2x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = t \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} x = \pi \rightarrow t = 2\pi \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow I_2 = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos t \cdot dt = \frac{\pi}{2} \cdot [\operatorname{sen} t]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot (\text{sen } 4\pi - \text{sen } 0) = \frac{\pi}{2} \cdot (0 - 0) = \underline{0}.$$

Sustituyendo los valores de I_1 e I_2 en la expresión (*):

$$\underline{\underline{V = \pi^2 u^3}}$$

www.yoquieroaprobar.es