

**PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)****UNIVERSIDAD DE MADRID****JUNIO – 2011 (ESPECÍFICO)**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

**OPCIÓN A**

1º) Dado el sistema  $\begin{cases} \lambda x + \lambda z = 2 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ x + 3y + z = 2\lambda \end{cases}$ , se pide:

a ) Discutir el sistema según los valores del parámetro  $\lambda$ .

b ) Resolver el sistema para  $\lambda = 1$ .

-----

a )

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función de  $\lambda$  es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - \lambda^2 + 3\lambda = 6\lambda = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = 0}.$$

Para  $\lambda \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Deter min ado}$

Ahora vamos a estudiar el rango de la matriz ampliada  $M'$  para  $\lambda = 0$ .

$$\text{Para } \lambda = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}.$$

$$\underline{\underline{\text{Para } \lambda = 0 \Rightarrow \text{Rango } M = 2 \;; \text{ Rango } M' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}}}$$

b)

Resolvemos para el caso de  $\lambda = 1$ . El sistema resulta  $\begin{cases} x + z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases}$ , que es compatible determinado.

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases} \rightarrow z = 2 - x \Rightarrow \begin{cases} x + y - (2 - x) = 1 \\ x + 3y + (2 - x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2 + x = 1 \\ x + 3y + 2 - x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3y = 0 \end{cases} \rightarrow \underline{\underline{y = 0}} \;;$$

$$2x + y = 3 \;; \; 2x = 3 \;; \; \underline{\underline{x = \frac{3}{2}}} \;; \; z = 2 - x = 2 - \frac{3}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} = z$$

\*\*\*\*\*

2º) Dada la función  $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ , se pide:

a) Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos, y las asíntotas de f.

b) Calcula el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas  $x = 0$  y  $x = 3$ .

-----

a)

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo para los valores de x que anulan la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1)^2 - (x-1) \cdot 2(x+1) \cdot 1}{(x+1)^4} = \frac{(x+1) - 2(x-1)}{(x+1)^3} = \frac{x+1-2x+2}{(x+1)^3} = \frac{3-x}{(x+1)^3} = f'(x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3-x}{(x+1)^3} = 0 \quad ; ; \quad 3-x = 0 \quad ; ; \quad \underline{x=3}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, se trata de un máximo relativo.

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot (x+1)^3 - (3-x) \cdot 3(x+1)^2 \cdot 1}{(x+1)^6} = \frac{-(x+1) - 3(3-x)}{(x+1)^4} = \frac{-x-1-9+3x}{(x+1)^4} = \frac{2x-8}{(x+1)^4} = \underline{\underline{= \frac{2(x-4)}{(x+1)^4} = f''(x)}}.$$

$$f''(3) = \frac{2 \cdot (3-4)}{(3+1)^4} = \frac{-2}{4^4} < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo relativo para } x = 3.}}$$

$$f(3) = \frac{3-1}{(3+1)^2} = \frac{2}{4^2} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo relativo: } A\left(3, \frac{1}{8}\right)}}.$$

Las asíntotas son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma  $y = k$ .

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{El eje X es asíntota horizontal.}}}$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$(x+1)^2 = 0 \quad ; ; \quad x+1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x=-1.}}$$

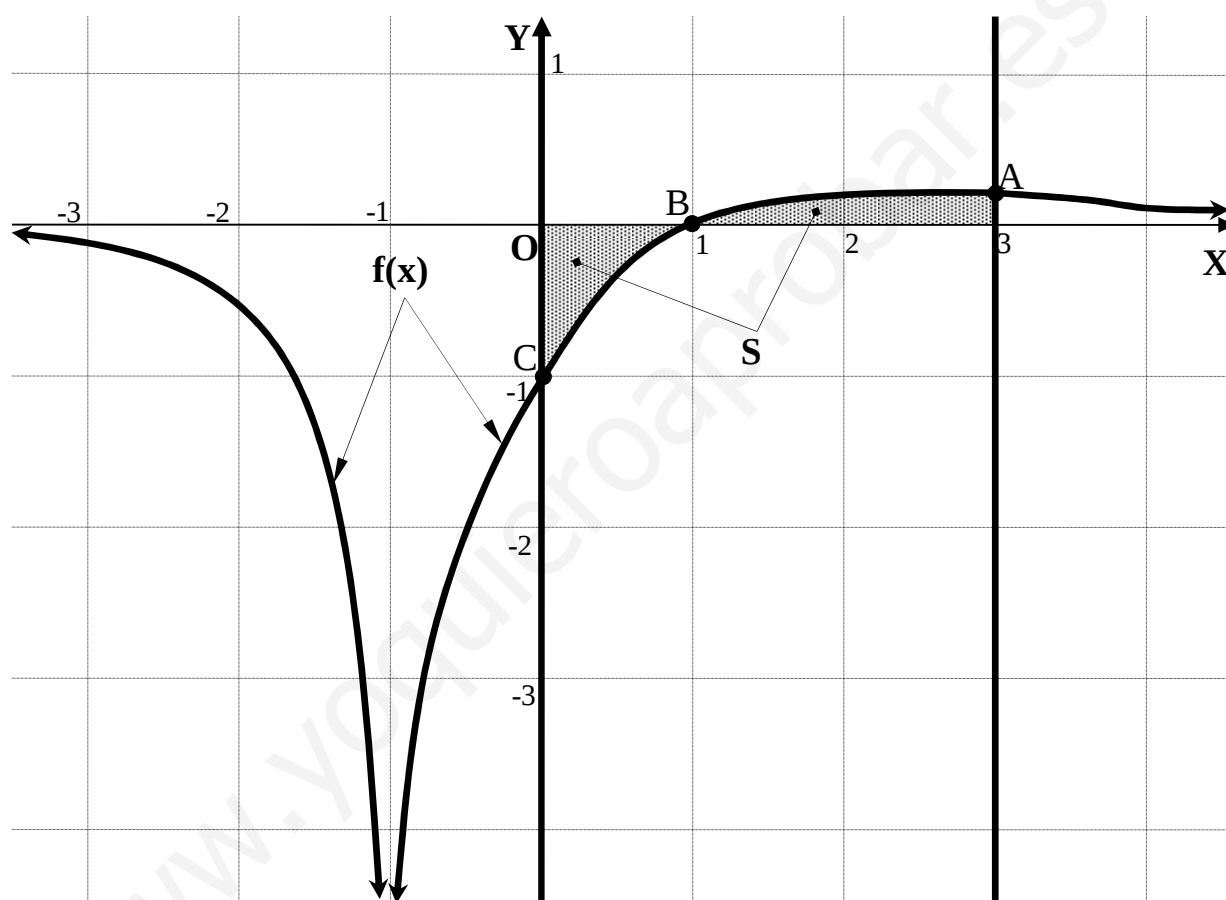
Oblicuas: son de la forma  $y = mx + n$ , siendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x-1}{(x+1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x(x+1)^2} = 0 = m.$$

No tiene asíntotas oblicuas.

b)

Con los datos del apartado anterior y teniendo en cuenta que la función corta a los ejes de coordenadas en los puntos B(0, -1) y C(1, 0), la representación gráfica de la situación es la que aparece en el gráfico adjunto.



$$S = \int_1^0 f(x) \cdot dx + \int_1^3 f(x) \cdot dx = [F(x)]_1^0 + [F(x)]_1^3 = F(0) - F(1) + F(3) - F(1) = \underline{F(0) + F(3) - 2F(1)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Siendo } F(x) &= \int f(x) \cdot dx = \int \frac{x-1}{(x+1)^2} \cdot dx \Rightarrow \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{M}{x+1} + \frac{N}{(x+1)^2} = \frac{M(x+1)+N}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{M(x+1)+N}{(x+1)^2} = \frac{Mx+M+N}{(x+1)^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M=1 \\ M+N=-1 \end{array} \right\} \rightarrow \underline{N=-2} \Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{x+1} \cdot dx - 2 \int \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx = \\ &= L(x+1) - 2 \int (x+1)^{-2} \cdot dx = L(x+1) - 2 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \underline{L(x+1) + \frac{2}{x+1} = F(x)}. \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor obtenido de F(x) en la expresión de S:

$$\begin{aligned} S &= F(0) + F(3) - 2F(1) = \left[ L(0+1) + \frac{2}{0+1} \right] + \left[ L(3+1) + \frac{2}{3+1} \right] - 2 \left[ L(1+1) + \frac{2}{1+1} \right] = \\ &= L1 + 2 + L4 + \frac{2}{4} - 2(L2 + 1) = 0 + 2 + 2L2 + \frac{1}{2} - 2L2 - 2 = \frac{1}{2} u^2 = S \end{aligned}$$

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es

3º) Dadas las rectas  $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$  y  $s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1}$ , se pide:

a ) Estudiar la posición relativa de r y s.

b ) Determinar la ecuación del plano  $\pi$  que contiene a las recta r y s.

-----

a )

Las rectas r y s tienen el mismo vector director,  $\vec{u} = (2, 1, 1)$ , lo que significa que son paralelas o coincidentes; para diferenciar el caso tomamos el punto de la recta r, A(-1, 0, -1), y comprobamos si se satisface la ecuación de s, en cuyo caso serán coincidentes y si no se satisface serán paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1} \\ A(-1, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1-5}{2} \neq \frac{0-4}{1} \neq \frac{-1}{1} \Rightarrow \underline{\text{El punto A no pertenece a s.}}$$

Las rectas r y s son paralelas.

b )

Un punto de s es B(5, 4, 0). Los puntos A y B determinan el siguiente vector:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5, 4, 0) - (-1, 0, -1) = (6, 4, 1).$$

La expresión general del plano  $\pi$  es la siguiente:

$$\pi(A; \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad (x+1) + 6y + 8(z+1) - 6(z+1) - 4(x+1) - 2y = 0 \quad ;$$

$$-3(x+1) + 4y + 2(z+1) = 0 \quad ; \quad -3x - 3 + 4y + 2z + 2 = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{\pi \equiv 3x - 4y - 2z + 1 = 0.}}$$

\*\*\*\*\*

4º) Dados los planos  $\alpha \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0$  y  $\beta \equiv x - 2y + 6z = 0$ , se pide:

a ) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta  $r$  determinada por la intersección de los planos  $\alpha$  y  $\beta$ .

b ) Determinar el plano  $\gamma$  que es paralelo al plano  $\alpha$  y pasa por  $P(\sqrt{2}, 1, 0)$ .

-----

La expresión de  $r$  por unas ecuaciones implícitas es  $r \equiv \begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$ .

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = -1 - 2\lambda \\ x - 2y = -6\lambda \end{cases} \begin{cases} 4x + 2y = -2 - 4\lambda \\ x - 2y = -6\lambda \end{cases} \Rightarrow 5x = -2 - 10\lambda ;;$$

$$\underline{x = -\frac{2}{5} - 2\lambda} ;; y = -1 - 2\lambda - 2x = -1 - 2\lambda + \frac{4}{5} + 4\lambda = \underline{-\frac{1}{5} + 2\lambda = y}.$$

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = -\frac{2}{5} - 2\lambda \\ y = -\frac{1}{5} + 2\lambda, \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

b )

El haz de planos paralelos al plano  $\alpha \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0$  es una expresión de la forma  $\psi \equiv 2x + y + 2z + D = 0$ .

De todos los infinitos planos del haz anterior, el plano  $\gamma$  que contiene al punto  $P(\sqrt{2}, 1, 0)$  es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{matrix} \psi \equiv 2x + y + 2z + D = 0 \\ P(\sqrt{2}, 1, 0) \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2\sqrt{2} + 1 + 2 \cdot 0 + D = 0 ;; \underline{D = -2\sqrt{2} - 1} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\gamma \equiv 2x + y + 2z - 2\sqrt{2} - 1 = 0}}$$

\*\*\*\*\*

## OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , se pide:

a) Calcular  $A^2 - 4A + 3I$ .

b) Demostrar que la matriz  $A^{-1}$  es  $\frac{1}{3}(4I - A)$ .

c) Hallar la matriz inversa de la matriz  $A - 2I$ .

a)

$$\begin{aligned} A^2 - 4A + 3I &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4-1+2 & -2-0-2 & -2+1-3 \\ 2+0+2 & -1+0-2 & -1-0-3 \\ -4+2-6 & 2+0+6 & 2-2+9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \\ -8 & 8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 4 & -3 & -4 \\ -8 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ 8 & -8 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{O = A^2 - 4A + 3I}}. \end{aligned}$$

b)

Para hallar la inversa de la matriz A vamos a utilizar el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} (A/I) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + 2F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow -F_2\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_3 \rightarrow \frac{1}{3}F_3\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 + F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 + F_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(4I - A) = \frac{1}{3} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{A^{-1}}.$$

$$\underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{3}(4I - A), \text{ c.q.d.}}}$$

c)

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$|A - 2I| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 4 + 1 = \underline{1} \quad ; \quad (A - 2I)^t = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$Adj(A - 2I)^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Otra forma de resolver éste apartado es considerando el apartado a), en particular teniendo en cuenta que:  $A^2 - 4A + 3I = A^2 - 4A + 4I - I = (A - 2I)^2 - I = O \Rightarrow \underline{(A - 2I)^2 = I}$ .

De lo anterior se deduce que:

$(A - 2I)^2 = (A - 2I)(A - 2I) = I \Rightarrow A - 2I = \frac{1}{A - 2I} = \underline{\underline{(A - 2I)^{-1} = A - 2I}}$ , como se puede comprobar en el ejercicio.

\*\*\*\*\*

2º) Dados los puntos A(1, -3, 0), B(3, 1, -2), C(7, 2, 3), D(5, -2, 5) y E(1, 0, 2) se pide:

a ) Demostrar que los puntos A, B, C y D son coplanarios.

b ) Demostrar que el polígono ABCD es un paralelogramo y calcular su área.

c ) Hallar la distancia del punto E al plano  $\pi$  determinado por los puntos A, B, C y D.

a )

Los puntos A(-1, 3, 0), B(3, 1, -2), C(7, 2, 3), D(5, -2, 5) determinan los vectores:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3, 1, -2) - (-1, 3, 0) = (2, 4, -2).$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (7, 2, 3) - (-1, 3, 0) = (6, 5, 3).$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AD} = D - A = (5, -2, 5) - (-1, 3, 0) = (4, 1, 5).$$

Demostrar que los puntos A, B, C y D son coplanarios es equivalente a demostrar que los vectores  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  son linealmente dependientes, es decir, que su rango sea menor que tres.

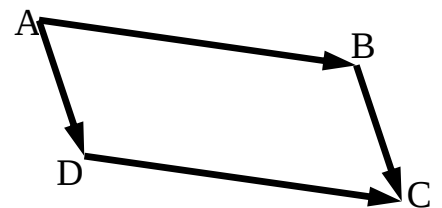
$$\text{Rango } \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 6 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 50 - 12 + 48 + 40 - 6 - 120 = 138 - 138 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Rango } \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = 2.$$

Queda demostrado que los puntos A, B, C y D son coplanarios.

b )

Demostrar que el polígono ABCD es un paralelogramo es equivalente a demostrar que son iguales los vectores  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .



$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= B - A = (3, 1, -2) - (-1, 3, 0) = (2, 4, -2) \\ \overrightarrow{DC} &= C - D = (7, 2, 3) - (5, -2, 5) = (2, 4, -2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= D - A = (5, -2, 5) - (-1, 3, 0) = (4, 1, 5) \\ \overrightarrow{BC} &= C - B = (7, 2, 3) - (3, 1, -2) = (4, 1, 5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

El área de un paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan:

$$S = \left| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} \right| = \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} \right\| = |20i - 8j + 2k - 16k + 2i - 10j| = |22i - 18j - 14k| =$$

$$= 2 \cdot |11i - 9j - 7k| = 2 \cdot \sqrt{11^2 + (-9)^2 + (-7)^2} = 2 \cdot \sqrt{121 + 81 + 49} = \underline{\underline{2\sqrt{251} u^2 = S.}}$$

c)

La expresión general del plano  $\pi$  es la siguiente:  $\pi(A; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z \\ 2 & 4 & -2 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0;$

$$12(x-1) - 12(y+3) + 10z - 24z + 10(x-1) - 6(y+3) = 0 \;; \; 22(x-1) - 18(y+3) - 14z = 0 \;;$$

$$11(x-1) - 9(y+3) - 7z = 0 \;; \; 11x - 11 - 9y - 27 - 7z = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv 11x - 9y - 7z - 38 = 0.}}$$

Sabiendo que la distancia del punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  al plano genérico de ecuación  $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$  es  $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ ; aplicándola al punto  $E(1, 0, 2)$  y al plano  $\pi \equiv 11x - 9y - 7z - 38 = 0$ , es:

$$d(E, \pi) = \frac{|11 \cdot 1 - 9 \cdot 0 - 7 \cdot 2 - 38|}{\sqrt{11^2 + (-9)^2 + (-7)^2}} = \frac{|11 - 14 - 38|}{\sqrt{251}} = \frac{41}{\sqrt{251}} = \frac{41\sqrt{251}}{251} \text{ unidades} = d(E, \pi)$$

\*\*\*\*\*

3º) Calcular los siguientes límites: a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right)$ . b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{x}$ .

-----

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) = 0 \cdot e^{\frac{1}{0}} = 0 \cdot e^{\infty} = 0 \cdot \infty \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{0}}}{\frac{1}{0}} = \frac{e^{\infty}}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = \underline{\underline{+\infty}}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{x} = \frac{\sqrt{1+\tan 0} - \sqrt{1-\tan 0}}{0} = \frac{\sqrt{1+0} - \sqrt{1-0}}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{-1}{\cos^2 x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2\sqrt{1+\tan x}} + \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2\sqrt{1-\tan x}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{1+\tan x}} + \frac{1}{\sqrt{1-\tan x}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) = 1.$$

\*\*\*\*\*

4º) Dada la función  $f(x) = \frac{1}{2} - \sin x$ , calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de  $f$ , el eje OX y las rectas  $x = 0$  y  $x = \frac{\pi}{2}$ .

-----

Los puntos de corte con el eje OX de la función  $f(x)$  en el intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - \sin x = 0 \;; \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \underline{A\left(0, \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Por ser  $f(x) = \frac{1}{2} - \sin x$  continua en su dominio, que es  $\mathbb{R}$ , los signos de la función en el intervalo  $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$  son positivos y los correspondientes al intervalo  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$  son negativos.

De lo expuesto anteriormente se deduce que el área pedida es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) \cdot dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot dx = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{6}} + [F(x)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) + F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underline{2F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)} = S. \quad (*) \end{aligned}$$

Siendo  $F(x) = \int \left(\frac{1}{2} - \sin x\right) \cdot dx = \underline{\frac{x}{2} + \cos x = F(x)}$ , sustituyendo en (\*), resulta:

$$\begin{aligned} S &= 2F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{2} + \cos \frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{0}{2} + \cos 0\right) - \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \cos \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= 2\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 0 - 1 - \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\left(\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}\right)u^2 = S}}. \end{aligned}$$

\*\*\*\*\*