

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE MADRID****JUNIO – 2013**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dados el punto $P(-1, 0, 2)$ y las rectas $r \equiv \begin{cases} x-z=1 \\ y-z=-1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=3 \end{cases}$, se pide:

- a) Determinar la posición relativa de r y s .
- b) Determinar la ecuación de la recta t que pasa por P y corta a r y s .
- c) Determinar la ecuación de la recta p perpendicular común a r y s .

a)

El estudio se va a hacer mediante el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que determinan las dos rectas expresadas por ecuaciones implícitas.

La recta $s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=3 \end{cases}$ expresada en forma de dos ecuaciones implícitas es de la

forma siguiente: $s \equiv x-1 = y = \frac{z-3}{0} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x-y=1 \\ z=3 \end{cases}}$.

El sistema que forman las rectas r y s es $\begin{cases} x-z=1 \\ y-z=-1 \\ x-y=1 \\ z=3 \end{cases}$, cuyo estudio mediante el teo-

rema de Rouché-Fröbenius se hace a continuación.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; ; M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En función de los rangos de las matrices M y M', la posición relativa de las dos rectas es la siguiente:

Rango M = Rango M' = 2 \Rightarrow (Puntos comunes) \Rightarrow Son rectas coincidentes.

Rango M = 2 ; ; Rango M' = 3 \Rightarrow (No hay puntos comunes) \Rightarrow Son rectas paralelas.

Rango M = Rango M' = 3 \Rightarrow (Puntos comunes) \Rightarrow Las rectas se cortan en un punto.

Rango M = 3 ; ; Rango M' = 4 \Rightarrow (No hay puntos comunes) \Rightarrow Las rectas se cruzan.

$$\text{Rango } M' \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - F_1\} \Rightarrow |M'| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 - 3 = 1 \Rightarrow$$

\Rightarrow Rango M' = 4

Vamos a determinar ahora el rango de M:

$$\{F_1 - F_2 = F_3\} \Rightarrow \{F_1, F_2, F_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = 3}$$

Rango M' = 4 ; ; Rango M = 3 \Rightarrow Las rectas r y s se cruzan

b)

El plano π_1 que contiene a la recta r y al punto P(-1, 0, 2) es el siguiente:

Un punto de la recta r es M(1, -1, 0). Los puntos M y P determinan el siguiente vector: $\vec{m} = \overrightarrow{MP} = (1, -1, 0) - (-1, 0, 2) = (2, -1, -2)$.

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea perpendicular a los dos vectores normales de los planos que la determinan, que son $\vec{u}_1 = (1, 0, -1)$ y $\vec{u}_2 = (0, 1, -1)$.

$$\vec{v}_r = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = k + i + j = i + j + k = \underline{\underline{(1, 1, 1)}} = \vec{v}_r.$$

La expresión general del plano π_1 es la siguiente:

$$\pi_1(P, \vec{v}_r, \vec{m}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad -2(x+1) + 2y - (z-2) - 2(z-2) + (x+1) + 2y =$$

$$= -(x+1) + 4y - 3(z-2) = -x - 1 + 4y - 3z + 6 = 0 \Rightarrow \underline{\pi_1 \equiv x - 4y + 3z - 5 = 0}.$$

El plano π_2 que contiene a la recta s y al punto $P(-1, 0, 2)$ es el siguiente:

Un punto y un vector de la recta r son $N(1, 0, 3)$ y $\vec{v}_s = (1, 1, 0)$.

Los puntos N y P determinan el vector: $\vec{n} = \overrightarrow{NP} = (1, 0, 3) - (-1, 0, 2) = (2, 0, 1)$.

La expresión general del plano π_2 es la siguiente:

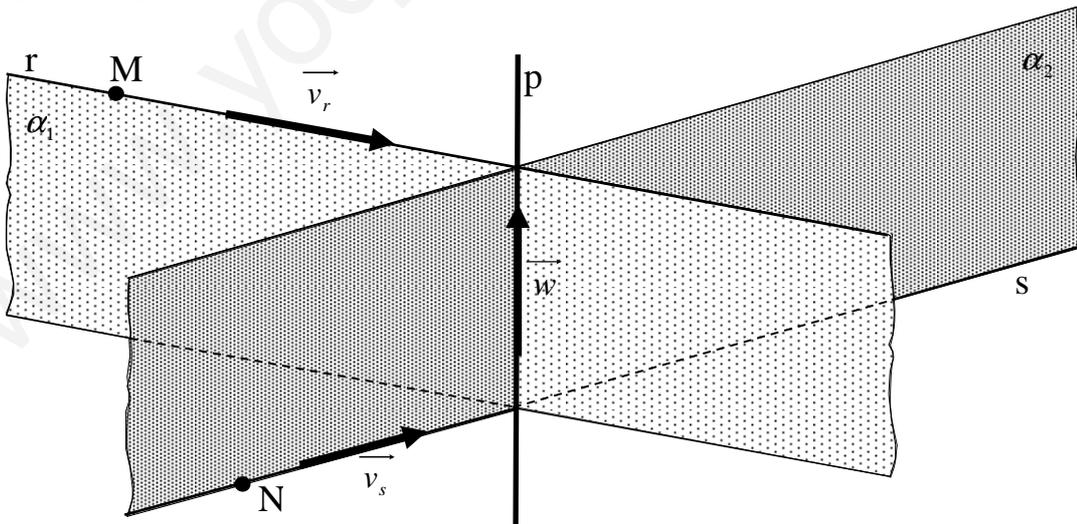
$$\pi_2(P, \vec{v}_s, \vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad (x+1) - 2(z-2) - y = x+1 - 2z + 4 - y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\pi_2 \equiv x - y - 2z + 5 = 0}.$$

La recta t pedida es la intersección de los planos π_1 y π_2 : $t \equiv \begin{cases} x - 4y + 3z - 5 = 0 \\ x - y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$.

c)

Para determinar la recta p , perpendicular común a las rectas dadas, nos guiamos por el siguiente gráfico.



Ya conocemos un punto y un vector director de cada una de las rectas r y s , que son, respectivamente, $M(1, -1, 0)$, $\vec{v}_r = (1, 1, 1)$ y $N(1, 0, 3)$ y $\vec{v}_s = (1, 1, 0)$.

Un vector \vec{w} , perpendicular a \vec{v}_r y \vec{v}_s es cualquiera que sea linealmente depen-

diente de su producto vectorial:

$$\vec{w}' = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = j+k-k-i = -i+j \Rightarrow \underline{\vec{w} = (1, -1, 0)}.$$

Ahora determinamos los planos α_1 y α_2 , de la forma siguiente:

$$\alpha_1(M; \vec{v}_r, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;; \; (y+1)-z-z+(x-1)=0 \;; \; y+1-2z+x-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha_1 \equiv x+y-2z=0}.$$

$$\alpha_2(N; \vec{v}_s, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;; \; -(z-3)-(z-3)=0 \;; \; -2(z-3)=0 \Rightarrow \underline{\alpha_2 \equiv z-3=0}.$$

La recta pedida p , es la que determinan los planos α_1 y α_2 en su intersección, que es la siguiente: $\underline{\underline{p \equiv \begin{cases} x+y-2z=0 \\ z-3=0 \end{cases}}}$.

2º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax+7y+5z=0 \\ x+ay+z=3 \\ y+z=-2 \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo según los valores de α .

b) Resolverlo en el caso de $\alpha = 4$.

c) Resolverlo en el caso de $\alpha = 2$.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 7 & 5 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} \alpha & 7 & 5 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} \alpha & 7 & 5 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 + 5 - \alpha - 7 = \alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \quad ; \quad a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \underline{\alpha_1 = -1} \quad ; \quad \underline{\alpha_2 = 2}.$$

Para $\begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible determinado}$

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 3 + 10 =$$

$= 15 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}.$

Para $a = -1 \Rightarrow \text{Rango } M = 2 \quad ; \quad \text{Rango } M' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}$

$$\text{Para } a = 2 \text{ es } M' = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 6 + 10 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}$

Para $a = 2 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible indeterminado}$

b)

Para $\alpha = 4$ el sistema es $\begin{cases} 4x+7y+5z=0 \\ x+4y+z=3 \\ y+z=-2 \end{cases}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4^2 - 4 - 2} = \frac{15 - 14 + 40 - 21}{16 - 6} = \frac{20}{10} = \underline{\underline{2}} = x.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{10} = \frac{12 - 10 + 8}{10} = \frac{10}{10} = \underline{\underline{1}} = y.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{10} = \frac{-32 - 12 + 14}{10} = \frac{-30}{10} = \underline{\underline{-3}} = z.$$

c)

Para $\alpha = 2$ el sistema es $\begin{cases} 2x+7y+5z=0 \\ x+2y+z=3 \\ y+z=-2 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Despreciando, por ejemplo, la primera ecuación y parametrizando $z = \lambda$:

$$\left. \begin{array}{l} x+2y=3-\lambda \\ y=-2-\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow x+2 \cdot (-2-\lambda)=3-\lambda \;; \; x-4-2\lambda=3-\lambda \;; \; \underline{x=7+\lambda}.$$

$$\text{Solución: } \left\{ \begin{array}{l} x=7+\lambda \\ y=-2-\lambda \\ z=\lambda \end{array} \right\}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

3º) Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$, se pide:

a) Hallar las asíntotas de su gráfica.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

a)

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma $y = k$.

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x-3)^2} = \infty \Rightarrow \underline{\text{No tiene asíntotas horizontales.}}$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$(x-3)^2 = 0 \quad ; \quad x-3 = 0 \Rightarrow \underline{x=3}.$$

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 6x + 9)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - 6x^2 + 9x} = 1 = m.$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 6x + 9} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + 6x^2 - 9x}{x^2 - 6x + 9} = 6 = n.$$

La recta $y = x + 6$ es la asíntota oblicua de la función.

b)

La derivada de una función en un punto es el valor de la pendiente de su recta tangente en ese punto.

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x-3)^2 - x^3 \cdot 2 \cdot (x-3) \cdot 1}{(x-3)^4} = \frac{3x^2 \cdot (x-3) - 2x^3}{(x-3)^3} = \frac{3x^3 - 9x^2 - 2x^3}{(x-3)^3} = \frac{x^3 - 9x^2}{(x-3)^3}.$$

$$m = f'(2) = \frac{2^3 - 9 \cdot 2^2}{(2-3)^3} = \frac{8 - 36}{-1} = 28 = m.$$

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f(2) = \frac{2^3}{(2-3)^2} = \frac{8}{1} = 8 \Rightarrow \underline{P(2, 8)}.$$

Sabiendo que la ecuación de una recta conocida la tangente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, la tangente pedida es:

$$y - 8 = 28 \cdot (x - 2) = 28x - 56 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Recta tangente: } t \equiv 28x - y - 48 = 0}}$$

www.yoquieroaprobar.es

4º) Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x-3}{x^2+9} \cdot dx$.

b) $\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3} \cdot dx$.

a)

$$\int \frac{x-3}{x^2+9} \cdot dx = \int \frac{x}{x^2+9} \cdot dx - 3 \cdot \int \frac{1}{x^2+9} \cdot dx = \underline{A-3B} \quad (*)$$

$$A = \int \frac{x}{x^2+9} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2+9=t \\ 2x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{1}{2} L t = \underline{\frac{1}{2} L(x^2+9) = A}$$

$$B = \int \frac{1}{x^2+9} \cdot dx = \int \frac{1}{9\left(\frac{x^2}{9}+1\right)} \cdot dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{3}=t \\ dx=3dt \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \int \frac{1}{t^2+1} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{t^2+1} \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot \text{arc tag } t + C = \underline{\frac{1}{3} \text{arc tag } \frac{x}{3} + C = B}$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B, resulta:

$$\underline{\underline{\int \frac{x-3}{x^2+9} \cdot dx = \frac{1}{2} L(x^2+9) - \text{arc tag } \frac{x}{3} + C}}$$

b)

$$\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3} \cdot dx = \int_1^2 \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} + x \right) \cdot dx = \int_1^2 \left(3x^{-3} - \frac{1}{x} + x \right) \cdot dx = \left[\frac{3x^{-2}}{-2} - Lx + \frac{x^2}{2} \right]_1^2 =$$

$$= \left[-\frac{3}{2x^2} - Lx + \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \left(-\frac{3}{2 \cdot 2^2} - L2 + \frac{2^2}{2} \right) - \left(-\frac{3}{2 \cdot 1^2} - L1 + \frac{1^2}{2} \right) = -\frac{3}{8} - L2 + 2 + \frac{3}{2} + 0 - \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{3}{8} - L2 + 3 = \underline{\underline{\frac{21}{8} - L2}}$$

OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x) = 2\cos^2 x$, se pide:

a) Determinar los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Determinar los puntos de inflexión de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot dx$.

a)

$$f'(x) = 2 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (-\operatorname{sen} x) = -4 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \underline{-2 \operatorname{sen}(2x)}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2 \operatorname{sen}(2x) = 0 \quad ; ; \quad \operatorname{sen}(2x) = 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \underline{x_1 = -\frac{\pi}{2}} \quad ; ; \quad \underline{x_2 = 0} \quad ; ; \quad \underline{x_3 = \frac{\pi}{2}}.$$

$$f''(x) = -2 \cdot \cos(2x) \cdot 2 = -4 \cos(2x).$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2 \cdot \cos(-\pi) = -2 \cdot (-1) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo para } x = -\frac{\pi}{2}}.$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo: } A\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)}}.$$

$$f''(0) = -2 \cdot \cos 0 = -2 \cdot 1 = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo para } x = 0}}.$$

$$f(0) = 2 \cos^2 0 = 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo: } B(0, 2)}}.$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \cdot \cos \pi = -2 \cdot (-1) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo para } x = \frac{\pi}{2}}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo: } C\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}}.$$

(Este resultado del punto C era esperable por ser la función simétrica con respecto al eje de ordenadas).

b)

Una función tiene un punto de inflexión para los valores que anulan la segunda derivada y hacen distinta de cero la tercera derivada.

$$f''(x)=0 \Rightarrow -4\cos(2x)=0 \;; \cos(2x)=0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \underline{\underline{-\frac{\pi}{4}}} \;; x_3 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

$$f'''(x) = -4 \cdot [-\text{sen}(2x)] \cdot 2 = 8\text{sen}(2x).$$

$$f'''(\pm \frac{\pi}{4}) = 8 \cdot \text{sen}(\pm \frac{\pi}{2}) \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{P. I. para } x_1 = -\frac{\pi}{4} \text{ y } x_2 = \frac{\pi}{4}}.$$

$$f(\pm \frac{\pi}{4}) = 2\cos^2\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\pm\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow P. I. \Rightarrow \underline{\underline{D\left(-\frac{\pi}{4}, 1\right)}} \text{ y } \underline{\underline{E\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)}}.$$

c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot \cos^2 x \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot dx.$$

Teniendo en cuenta que $\int \cos^2 x \cdot dx$ es:

$$\int \cos^2 x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos(2x) \\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} \cdot dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = t \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \cos^2 x \cdot dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \int \cos t \cdot dt = \frac{x}{2} + \frac{\text{sen } t}{2} + C = \underline{\underline{\frac{x}{2} + \frac{\text{sen}(2x)}{2} + C}}, \text{ el valor pedido}$$

es el siguiente:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot dx = \left[2 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{\text{sen } 2x}{2} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = [x + \text{sen } 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} + \text{sen } \pi \right) - (0 + \text{sen } 0) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0 = \frac{\pi}{2}}}.$$

2º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar el valor de λ para el cual la ecuación matricial $X \cdot A = B$ tiene solución única.

b) Calcular la matriz X para $\lambda = 4$.

c) Calcular el determinado de la matriz $A^2 \cdot B$ en función de λ .

a)

Por ser $X \cdot A = B$;; $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$;; $X \cdot I = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$, para que exista solución única tiene que existir A^{-1} , por lo cual tiene que ser $|A| \neq 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 + \lambda = 1 + \lambda = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = -1}.$$

La solución es única $\forall x \in R - \{-1\}$

b)

Para $\lambda = 4$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Su inversa la hallamos por el método de Gauss-

Jordan:

$$\begin{aligned} (A/I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \{F_2 \rightarrow -\frac{1}{3}F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 - 4F_2 \\ F_3 \rightarrow F_3 + F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \{F_3 \rightarrow -\frac{3}{5}F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 - \frac{8}{3}F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 + \frac{2}{3}F_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{array} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & 11 \\ 3 & 7 & 14 \end{pmatrix}}}.$$

c)

$$A^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 2\lambda & 2\lambda \\ 2 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6\lambda & 1+3\lambda & 1-\lambda \\ \lambda-1 & 2 & 3-\lambda \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}}}.$$

$$|A^2 \cdot B| = \begin{vmatrix} 6\lambda & 1+3\lambda & 1-\lambda \\ \lambda-1 & 2 & 3-\lambda \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8\lambda-2 & 5\lambda-1 & 1-\lambda \\ 3\lambda-7 & 2\lambda-4 & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 8\lambda-2 & 5\lambda-1 \\ 3\lambda-7 & 2\lambda-4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(16\lambda^2 - 32\lambda - 4\lambda + 8 - 15\lambda^2 + 3\lambda + 35\lambda - 7) = -(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = \underline{\underline{-(\lambda+1)^2 = |A^2 \cdot B|}}.$$

3º) a) Hallar los puntos de corte de la recta de dirección $\vec{v} = (2, 1, 1)$ y que pasa por el punto $P(4, 6, 2)$, con la superficie esférica de centro $C(1, 2, -1)$ y radio $\sqrt{26}$.

b) Hallar la distancia del punto $Q(-2, 1, 0)$ a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{x-3}{2}$.

a)

La recta de dirección $\vec{v} = (2, 1, 1)$ y que pasa por el punto $P(4, 6, 2)$ tiene por expresión paramétrica: $r \equiv \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$.

La esfera de centro $C(1, 2, -1)$ y radio $\sqrt{26}$ tiene por expresión implícita:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = (\sqrt{26})^2 \quad ; ; \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 2z + 1 = 26 \quad ; ;$$

$$\underline{x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 20 = 0}.$$

Los puntos de corte de la recta y la esfera son las soluciones del sistema que forman:

$$\left. \begin{array}{l} x = 4 + 2\lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 20 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4+2\lambda)^2 + (6+\lambda)^2 + (2+\lambda)^2 - 2(4+2\lambda) - 4(6+\lambda) + 2(2+\lambda) - 20 = 0 \quad ; ;$$

$$16 + 16\lambda + 4\lambda^2 + 36 + 12\lambda + \lambda^2 + 4 + 4\lambda + \lambda^2 - 8 - 4\lambda - 24 - 4\lambda + 4 + 2\lambda - 20 = 0 \quad ; ;$$

$$6\lambda^2 + 26\lambda + 8 = 0 \quad ; ; \quad 3\lambda^2 + 13\lambda + 4 = 0 \quad ; ; \quad \lambda = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 48}}{6} = \frac{-13 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{-13 \pm 11}{6} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{3} \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \\ y = 6 - \frac{1}{3} = \frac{17}{3} \\ z = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{Q_1\left(\frac{10}{3}, \frac{17}{3}, \frac{5}{3}\right)}}$$

$$\lambda_2 = -4 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 8 = -4 \\ y = 6 - 4 = 2 \\ z = 2 - 4 = -2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{Q_2(-4, 2, -2)}}$$

b)

La distancia de un punto Q a una recta r viene dada por la siguiente fórmula:

$$d(Q, r) = \frac{|\overrightarrow{AQ} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}, \text{ siendo A un punto de la recta r y } \vec{v} \text{ un vector director de la recta r.}$$

Un punto de la recta r es A(1, -2, 3) y un vector director de r es $\vec{v} = (2, 1, 2)$.

$$\overrightarrow{AQ} = Q - A = (-2, 1, 0) - (1, -2, 3) = \underline{(-3, 3, -3)}.$$

$$d(Q, r) = \frac{|\overrightarrow{AQ} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|6i - 6j - 3k - 6k + 3i + 6j|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|9i - 9k|}{\sqrt{9}} = \frac{|9i - 9k|}{3} =$$

$$= |3i - 3k| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \underline{\underline{3\sqrt{2} \text{ unidades} = d(Q, r)}}.$$

4º) Dados el punto $P(1, 0, -1)$, el plano $\pi \equiv 2x - y + z + 1 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} -2x + y - 1 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar la ecuación del plano β que pasa por P , es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π .

b) Hallar el ángulo entre r y π .

a)

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\vec{u}_1 = (-2, 1, 0)$ y $\vec{u}_2 = (3, 0, -1)$.

$$\vec{v}'_r = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -i - 3k - 2j = -i - 2j - 3k \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 2, 3).$$

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2, -1, 1)$.

El plano pedido β es el que determinan el punto P y los vectores \vec{v}_r y \vec{n} :

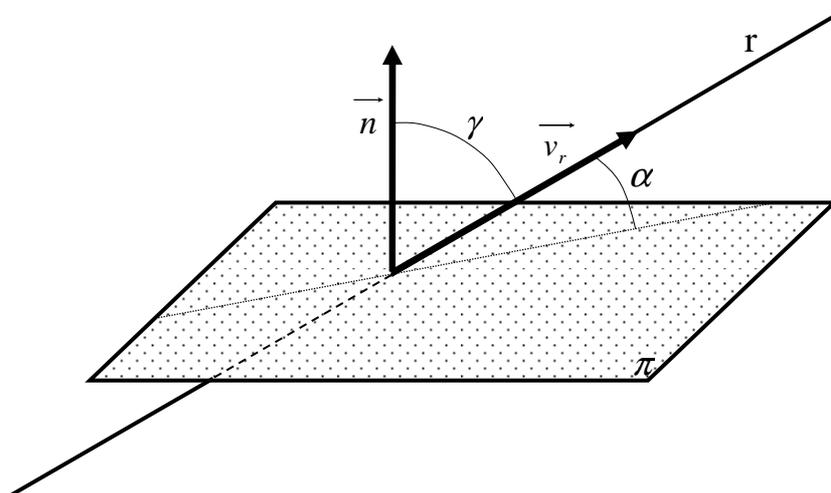
$$\beta(P; \vec{v}_r, \vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad 2(x-1) + 6y - (z+1) - 4(z+1) + 3(x-1) - y = 0 \quad ; ;$$

$$5(x-1) + 5y - 5(z+1) = 0 \quad ; \quad 5x - 5 + 5y - 5z - 5 = 0 \quad ; \quad 5x + 5y - 5z - 10 = 0.$$

$$\underline{\underline{\beta \equiv x + y - z - 2 = 0}}$$

b)

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un esquema de la situación:



El ángulo α que forman el plano π y la recta r es el complementario del ángulo γ que forman el vector \vec{v}_r , director de r , y el vector \vec{n} , normal al plano π .

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = |\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{n}}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}|}. \text{ Teniendo en cuenta que los ángulos } \alpha$$

y β son complementarios, es:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{n}}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(1, 2, 3) \cdot (2, -1, 1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2 - 2 + 3}{\sqrt{1 + 4 + 9} \cdot \sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \\ &= \frac{3}{\sqrt{84}} = \frac{3}{9.1652} = 0.3273 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 19^\circ 6' 24''}}. \end{aligned}$$
